Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. (MJPAA)

Volume 4(1), 2018, Pages 17–32

ISSN: Online 2351-8227 - Print 2605-6364

DOI 10.1515/mjpaa-2018-0003

Special Periodic Even Functions (Les Fonctions Périodiques Paires Spéciales)

MARCEL GRANGÉ^{1,a}

ABSTRACT. *In this paper the periodic even functions for which all the regular Riemann sums vanishes are called special periodic even functions. A construction of some of them is put forward, this one rests on the Fourier series and H. Davenport's estimations concerning the Moebius function. The special periodic even functions seem linked to the number theory, as this can be seen on the Fourier series result, on the proposed constructions and on the proof that such functions cannot belong to the Wiener algebra.*

Résumé. *Dans cet article les fonctions périodiques paires pour lesquelles toutes les sommes de Riemann régulières sont nulles sont appelées fonctions périodiques paires spéciales. Il en est avancé une construction de certaines d'entre-elles, construction qui repose sur la série de Fourier et sur des estimations obtenues à partir de celle de H. Davenport concernant la fonction de Moebius. Les fonctions paires spéciales apparaissent liées à la théorie des nombres, comme le montre leur série de Fourier, les constructions proposées et la démonstration que de telles fonctions ne peuvent appartenir à l'algèbre de Wiener.*

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 33E99.

Key words and phrases. *series de Fourier, fonctions de Moebius et de Liouville, estimation de H. Davenport.*

1. Introduction

On considère le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}$, formé des fonctions f de période égale à 1, telles que pour tout entier $N \geq 1$ on ait :

$$\sum_{p=0}^{N-1} f\left(\frac{p}{N}\right) = 0$$

Le sous-ensemble $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, contenant déjà le sous-espace vectoriel formé des fonctions de période égale à 1 *et impaires*. Il s'agit de montrer que le sous-espace $\mathcal{F}$ contient d'autres fonctions que

Received November 07, 2018 - Accepted December 15, 2018.

©The Author(s) 2017. This article is published with open access by Sidi Mohamed Ben Abdallah University.

¹IMB Université de Bordeaux. 351 cours de la Libération. F-33405 Talence Cedex.

^a e-mail: marcel.grange@numericable.fr .

les fonctions impaires. Comme toute fonction est somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire, il s'agit en fait de construire des fonctions f de période égale à 1, paires et telles que pour tout entier $N \geq 1$ on ait :

$$\sum_{p=0}^{N-1} f\left(\frac{p}{N}\right) = 0$$

fonctions qu'on peut dénommer *fonctions périodiques paires spéciales*.

Ce problème est transposé dans le cadre des fonctions continues sur le cercle unité $\mathbb{T}$, muni la mesure de Lebesgue normalisée σ . On note $\{1, \xi_N, \dots, \xi_N^{N-1}\}$ l'ensemble des racines $N^{\text{ième}}$ de 1 et

$$\xi_N = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$$

On forme le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ des fonctions complexes continues sur $\mathbb{T}$, formé des fonctions f satisfaisant :

1. pour tout ξ de $\mathbb{T}$

$$f(\bar{\xi}) = f(\xi)$$

2. pour tout entier $N \geq 1$

$$R_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} f(\xi_N^p) = 0$$

Une fonction f continue sur $\mathbb{T}$ vérifiant la propriété (1) est appelée, dans ce contexte, *fonction paire*. Le sous-espace $\mathcal{E}$ est fermé dans l'espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Le fait de considérer $R_N(f)$ au lieu de la somme $\sum_{p=0}^{N-1} f(\xi_N^p)$ permet d'interpréter $R_N(f)$ comme une somme de Riemann de la fonction continue f , de sorte que l'intégrale de toute fonction f du sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est nulle.

Coefficients de Fourier des fonctions périodiques paires spéciales

Lemma 1.1. Pour tout entier rationnel m , on désigne par π_m la fonction puissance $\zeta \mapsto \zeta^m$. Pour tout entier $N \geq 1$ on a :

$$R_N(\pi_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in N\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } m \notin N\mathbb{Z} \end{cases}$$

En particulier on a l'égalité $R_N(\pi_m) = R_N(\pi_{-m})$.

Proof. Si m appartient à $N\mathbb{Z}$ on a :

$$\sum_{p=0}^{N-1} (\xi_N^p)^m = \sum_{p=0}^{N-1} (\xi_N^m)^p = \sum_{p=0}^{N-1} 1^m = N$$

Si m n'appartient pas à $N\mathbb{Z}$, alors $\xi_N^m \neq 1$ et on obtient :

$$\sum_{p=0}^{N-1} (\xi_N^p)^m = \sum_{p=0}^{N-1} (\xi_N^m)^p = \frac{1 - (\xi_N^m)^N}{1 - \xi_N^m} = \frac{1 - (\xi_N^N)^m}{1 - \xi_N^m} = 0$$

Proposition 1.1. 1. Soit une fonction f continue et paire sur le cercle $\mathbb{T}$. Désignant par Pf sa transformée de Poisson, on a les formules :

$$\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} Pf(r\xi_N^p) = \hat{f}(0) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \hat{f}(qN) r^{qN}$$

$$R_N(f) = \widehat{f}(0) + 2 \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f}(qN) r^{qN}$$

2. Une fonction f continue et paire sur le cercle $\mathbb{T}$ appartient au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ si et seulement si $\widehat{f}(0) = 0$ et pour tout entier $N \geq 1$:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f}(qN) r^{qN} = 0$$

Proof. **1.** Classiquement, pour tout z de $\mathbb{D}$ on a les égalités :

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\bar{\xi}|^2} f(\xi) d\sigma(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(-n) \bar{z}^n + \widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$$

Parce que la fonction f est paire, pour tous r de $[0, 1[$ et ζ de $\mathbb{T}$ il vient :

$$Pf(r\zeta) = \widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) r^n (\zeta^n + \bar{\zeta}^n)$$

En conséquence et compte tenu du lemme 1 on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} Pf(r\xi_N^p) &= \widehat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) r^n (R_N(\pi_n) + R_N(\pi_{-n})) = \widehat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) r^n R_N(\pi_n) \\ &= \widehat{f}(0) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f}(qN) r^{qN} \end{aligned}$$

Du fait que la fonction Pf est un prolongement continu au disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$ de la fonction f , la seconde formule s'obtient en prenant la limite en 1 pour la variable r .

2. Conséquence immédiate du premier point de la proposition et du fait qu'une fonction de $\mathcal{E}$ a son intégrale nulle.

Proposition 1.2. **1.** Si la fonction f appartient au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ et satisfait la propriété

$$\sup_{n \geq 1} n |\widehat{f}(n)| < +\infty$$

alors pour tout entier $N \geq 1$ on a l'égalité :

$$\sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f}(qN) = 0$$

C'est le cas lorsque la fonction f est à variations bornées.

2. Si la fonction f continue et paire sur le cercle $\mathbb{T}$ vérifie $\widehat{f}(0) = 0$ et est telle que pour tout entier $N \geq 1$ on ait

$$\sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f}(qN) = 0$$

alors la fonction f appartient au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$.

3. Soit une fonction f continue et paire sur le cercle $\mathbb{T}$, dont la série de Fourier est du type

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} (\xi^k + \bar{\xi}^k)$$

où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite bornée. Elle appartient au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tout entier $N \geq 1$:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_{qN}}{q} = 0$$

- Proof.* **1.** Conséquence de la proposition (2) et du théorème taubérien de Liouville sur les séries entières.
2. Conséquence de la proposition (2) et du théorème d'Abel sur les séries entières.
3. Conséquence des deux premiers points de la proposition.

Construction de fonctions périodiques paires spéciales

Cette construction s'appuie sur le troisième point de la proposition (3). La suite bornée $(a_n)_{n \geq 1}$ sera la suite $(\mu(n))_{n \geq 1}$ ou la suite $(\lambda(n))_{n \geq 1}$ lorsque μ désigne la fonction de Moebius et λ la fonction de Liouville. Vérifier la condition $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{a_{qN}}{q} = 0$ pour tout entier $N \geq 1$ pour chacune de ces deux suites, nécessite *indirectement* l'estimation des sommes de H. Davenport [2]. En effet il s'agit d'estimer les sous-sommes du type

$$M_n(\xi, x) = \sum_{\substack{0 < j \leq x \\ \gcd(j, n) = 1}} \mu(j) \xi^j$$

des sommes de H. Davenport

$$M(\xi, x) = \sum_{0 < j \leq x} \mu(j) \xi^j$$

le couple (ξ, x) appartenant à $\mathbb{T} \times [0, +\infty[$. Précisément H. Davenport [2] a démontré en 1937 que pour tout $A > 0$ il existe une constante $D(A)$ telle que pour tout $x > 0$ on ait :

$$\sup_{\xi \in \mathbb{T}} |M(\xi, x)| \leq D(A) x (\ln(x+1))^{-A}$$

Le théorème qui suit propose une estimation du même type pour les sous-sommes de Davenport.

Th*eor*em 1.1. *Pour tout entier naturel $n \geq 1$, pour tout $A > 0$ il existe une constante $D(A, n)$ telle que pour tout $x > 0$ on ait :*

$$\mathcal{M}_n(x) = \sup_{\xi \in \mathbb{T}} |M_n(\xi, x)| \leq D(A, n) x (\ln(x+1))^{-A}$$

Proof. La décomposition de l'entier n en facteurs premiers étant $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, la condition $\gcd(j, n) = 1$ équivaut à la condition $\gcd(j, p_1 \cdots p_r) = 1$. De sorte qu'on obtient l'égalité $M_n = M_{p_1 \cdots p_r}$. Il est donc loisible de supposer que l'entier n est un nombre de Moebius de longueur $r \geq 0$, c'est-à-dire l'entier n est, dans le cas $r \geq 1$, égal à un produit $Q = p_1 \cdots p_r$ de r nombre premiers distincts les uns des autres, ou bien $n = 1$ dans le cas $r = 0$.

1. On dispose de la fonction complexe additive

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \longrightarrow \mathbb{C} \quad E \longmapsto M(\xi, x, E) = \sum_{\substack{0 < j \leq x \\ j \in E}} \mu(j) \xi^j$$

Par suite, grâce à la formule de Poincaré et parce que les nombres premiers p_i sont distincts les uns des autres, on a :

$$\begin{aligned} M\left(\xi, x, \bigcup_{i=1}^r p_i \mathbb{N}^*\right) &= \sum_{s=1}^r (-1)^{s-1} \left(\sum_{\text{card } J=s} M\left(\xi, x, \bigcap_{i \in J} p_i \mathbb{N}^*\right) \right) \\ &= \sum_{s=1}^r (-1)^{s-1} \left(\sum_{\text{card } J=s} M\left(\xi, x, \left(\prod_{i \in J} p_i\right) \mathbb{N}^*\right) \right) \end{aligned}$$

Ensuite on observe que pour tout entier naturel $k \geq 1$, le *pgcd* de k et $p_1 \cdots p_r$ vaut 1 si et seulement si aucun des p_i ne divise k , c'est-à-dire :

$$k \in \bigcap_{i=1}^r (p_i \mathbb{N}^*)^c = \left(\bigcup_{i=1}^r p_i \mathbb{N}^* \right)^c$$

En conséquence on obtient :

$$\begin{aligned} M_{p_1 \dots p_r}(\xi, x) &= M\left(\xi, x, \left(\bigcup_{i=1}^r p_i \mathbb{N}^*\right)^c\right) = M(\xi, x) - M\left(\xi, x, \bigcup_{i=1}^r p_i \mathbb{N}^*\right) \\ &= M(\xi, x) - \sum_{s=1}^r (-1)^{s-1} \left(\sum_{\text{card } J=s} M\left(\xi, x, \left(\prod_{i \in J} p_i\right) \mathbb{N}^*\right) \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, notons

$$Q(J) = \prod_{i \in J} p_i \quad \text{et} \quad x(J) = Q(J)^{-1} x$$

$$F(x, J) = \left\{ m \in \mathbb{N}^* ; 0 < m \leq x(J) \text{ et } \gcd(m, Q(J)) = 1 \right\}$$

Compte-tenu des propriétés de la fonction de Moebius [4], on a :

$$\begin{aligned} M(\xi, x, Q(J) \mathbb{N}^*) &= \sum_{0 < m \leq x(J)} \mu(Q(J) m) \xi^{Q(J) m} \\ &= (-1)^{\text{card } J} \sum_{m \in F(x, J)} \mu(m) (\xi^{Q(J)})^m = (-1)^{\text{card } J} M_{Q(J)}(\xi^{Q(J)}, x(J)) \end{aligned}$$

Par suite, comme on a évidemment $Q(\emptyset) = 1$ et $x(\emptyset) = x$, il vient :

$$\begin{aligned} M_{p_1 \dots p_r}(\xi, x) &= M(\xi, x) + \sum_{s=1}^r \left(\sum_{\text{card } J=s} M_{Q(J)}(\xi^{Q(J)}, x(J)) \right) \\ &= \sum_{s=0}^r \left(\sum_{\text{card } J=s} M_{Q(J)}(\xi^{Q(J)}, x(J)) \right) = \sum_{J \in \mathcal{P}\{1, \dots, r\}} M_{Q(J)}(\xi^{Q(J)}, x(J)) \end{aligned}$$

Remarquant $Q(\{1, \dots, r\}) = p_1 \dots p_r = Q$, on aboutit à l'égalité :

$$M_Q(\xi, x) = M_Q(\xi^Q, Q^{-1}x) + \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}\{1, \dots, r\} \\ \text{card } J \neq r}} M_{Q(J)}(\xi^{Q(J)}, x(J))$$

Enfin à l'inégalité :

$$\mathcal{M}_Q(x) \leq \mathcal{M}_Q(Q^{-1}x) + \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}\{1, \dots, r\} \\ \text{card } J < r}} \mathcal{M}_{Q(J)}(x(J))$$

2. Le théorème de Davenport [2] montre que la propriété est vraie si $n = 1$, c'est-à-dire si l'entier naturel n est un nombre de Moebius de longueur 0. Dans le cadre d'une *démonstration par récurrence sur la longueur d'un nombre de Moebius*, supposons la propriété jusqu'à la longueur $r - 1$ où l'entier r est supérieur ou égal à 1. Par hypothèse de récurrence, pour toute partie J de $\{1, \dots, r\}$ vérifiant $\text{card } J = s < r$ et pour tout $x > 0$ on a :

$$\mathcal{M}_{Q(J)}(x(J)) \leq D(A + r - s, Q(J)) x(J) (\ln(x(J) + 1))^{-A-r+s}$$

Cependant, une étude élémentaire de fonction montre que pour toute constante $K > 1$ et pour tout nombre réel $x > 0$ on a :

$$K^{-1} \ln(x + 1) \leq \ln(K^{-1}x + 1)$$

Ainsi, pour toute partie J de $\{1, \dots, r\}$ vérifiant $\text{card } J = s < r$ et pour tout $x > 0$ on obtient :

$$\mathcal{M}_{Q(J)}(x(J)) \leq D(A + r - s, Q(J)) Q(J)^{A+r-s-1} x (\ln(x + 1))^{-A-r+s}$$

Il convient d'observer que si $0 \leq x < 1$ alors $\mathcal{M}_Q(x) = 0$ et si $1 \leq x < 2$ alors $\mathcal{M}_Q(x) = 1$. De ce fait il est possible de supposer $x \geq 2$. Ainsi $\ln(x + 1) > 1$, et comme $-A - r + s < 0$, il vient :

$$(\ln(x + 1))^{-A-r+s} \leq (\ln(x + 1))^{-A-1}$$

En définitive, pour tout $x > 0$ on obtient :

$$\mathcal{M}_Q(x) \leq \mathcal{M}_Q(Q^{-1}x) + \mathcal{D}_{r-1} x (\ln(x+1))^{-A-1}$$

où la constante $\mathcal{D}_{r-1}$ vaut :

$$\max \left(\max_{1 \leq x \leq 2} x^{-1} (\ln(x+1))^{A+1}, \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}\{1, \dots, r\} \\ \text{card } J < r}} D(A+r-\text{card } J, Q(J)) Q(J)^{A+r-\text{card } J-1} \right)$$

Il est alors facile de démontrer que pour tout entier naturel $k \geq 1$ on a :

$$\mathcal{M}_Q(x) \leq \mathcal{M}_Q(Q^{-k}x) + \mathcal{D}_{r-1} \sum_{j=1}^k Q^{-(j-1)} x \left(\ln(Q^{-(j-1)}x + 1) \right)^{-A-1}$$

Une étude élémentaire montre que la fonction

$$t \mapsto \varphi(t) = (\ln(t+1))^{-A-1} t$$

est croissante sur l'intervalle $[\tau_A, +\infty[$ où le nombre τ_A est l'unique zéro strictement positif de la fonction

$$t \mapsto (A+1)(t+1)^{-1} t - \ln(t+1)$$

et ce nombre τ_A satisfait l'inégalité $\tau_A \geq A$. Pour tout $x \geq \tau_A$ il existe un unique entier $k \geq 1$ tel qu'on ait

$$Q^{k-1} \leq \tau_A^{-1} x < Q^k$$

On a alors :

$$k-1 = \text{Ent} \left((\ln Q)^{-1} \ln(\tau_A^{-1} x) \right) \leq (\ln Q)^{-1} (\ln x - \ln \tau_A)$$

Comme $\tau_A \geq A$ il est facile de vérifier que pour tout $x \geq \tau_A$ on a :

$$A^{-1}(A+1) \ln(x+1) - \ln x + \ln Q - \ln \tau_A \geq 0$$

De sorte qu'on obtient :

$$k \leq A^{-1}(A+1) (\ln Q)^{-1} \ln(x+1)$$

Évidemment on a les inégalités :

$$\tau_A \leq Q^{-(k-1)} x < \dots < Q^{-1} x < x$$

desquelles on tire :

$$\varphi(Q^{-(k-1)} x) < \dots < \varphi(Q^{-1} x) < \varphi(x)$$

Puis la majoration :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k Q^{-(j-1)} x \left(\ln(Q^{-(j-1)} x + 1) \right)^{-A-1} &= \sum_{j=1}^k \varphi(Q^{-(j-1)} x) \leq k \varphi(x) \\ &\leq A^{-1}(A+1) (\ln Q)^{-1} (\ln(x+1))^{-A} x \end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction $\mathcal{M}_Q$ étant bornée sur toute partie bornée, pour tout $x \geq \tau_A$ on a :

$$\mathcal{M}_Q(Q^{-k}x) \leq \sup \mathcal{M}_Q([0, \tau_A]) = K_A$$

Pour tout $x \geq \tau_A$ on obtient donc :

$$\mathcal{M}_Q(x) \leq K_A + A^{-1}(A+1) (\ln Q)^{-1} \mathcal{D}_{r-1} (\ln(x+1))^{-A} x$$

Notant :

$$\mathfrak{M}(A) = \min_{x>0} (\ln(x+1))^{-A} x$$

pour tout $x \geq \tau_A$, on constate l'inégalité

$$\mathcal{M}_Q(x) \leq \left(\mathfrak{M}(A)^{-1} K_A + A^{-1}(A+1) (\ln Q)^{-1} \mathcal{D}_{r-1} \right) (\ln(x+1))^{-A} x$$

On peut conclure, mais il est possible de préciser davantage. En effet, pour tout $0 < x \leq \tau_A$ on a :

$$\mathcal{M}_Q(x) \leq \mathfrak{M}(A)^{-1} K_A (\ln(x+1))^{-A} x$$

En conséquence, pour tout $x > 0$ il vient :

$$\mathcal{M}_Q(x) \leq \left(\mathfrak{M}(A)^{-1} K_A + A^{-1} (A+1) (\ln Q)^{-1} \mathcal{D}_{r-1} \right) (\ln(x+1))^{-A} x$$

La constante

$$D(A, Q) = \mathfrak{M}(A)^{-1} K_A + A^{-1} (A+1) (\ln Q)^{-1} \mathcal{D}_{r-1}$$

ne dépend effectivement que du couple (A, Q) en ce sens qu'elle dépend de tous les entiers $Q(J)$ qui sont les diviseurs de Q , où J parcourt l'ensemble des parties de $\{0, \dots, r\}$.

Comme pour la fonction μ de Moebius on considère, relativement à la fonction λ de Liouville, les sommes :

$$L(\xi, x) = \sum_{0 < j \leq x} \lambda(j) \xi^j \quad \text{et} \quad L_n(\xi, x) = \sum_{\substack{0 < j \leq x \\ \gcd(j, n) = 1}} \lambda(j) \xi^j$$

Corollary 1.2. *Pour tout entier naturel $n \geq 1$, pour tout $A > 0$ il existe une constante $D_\lambda(A, n)$ telle que pour tout $x > 0$ on ait :*

$$\mathcal{L}_n(x) = \sup_{\xi \in \mathbb{T}} |L_n(\xi, x)| \leq D_\lambda(A, n) x (\ln(x+1))^{-A}$$

Proof. Un entier naturel $k \geq 1$ s'écrit de manière unique $k = m^2 q$ où m est un entier naturel et q un nombre de Moebius. Comme la fonction de Liouville est complètement multiplicative on obtient successivement :

$$\lambda(k) = \lambda(m)^2 \lambda(q) = \lambda(q) = \mu(q)$$

Notons provisoirement $F_n(y)$ l'ensemble des nombres de Moebius q vérifiant

$$\gcd(q, n) = 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq q \leq y$$

Après avoir observé tout de suite que $\mathcal{L}_n(x)$ vaut 0 si $0 \leq x < 1$, pour tout $x \geq 1$ il vient :

$$L_n(\xi, x) = \sum_{\substack{0 < j \leq x \\ \gcd(j, n) = 1}} \lambda(j) \xi^j = \sum_{1 \leq m \leq \sqrt{x}} \left(\sum_{q \in F(m^{-2}x)} \mu(q) \xi^{m^2 q} \right)$$

Comme $\mu(j) = 0$ si le nombre entier j n'est pas un nombre de Moebius, on a :

$$\sum_{q \in F(m^{-2}x)} \mu(q) \xi^{m^2 q} = \sum_{\substack{0 < j \leq m^{-2}x \\ \gcd(j, n) = 1}} \mu(j) \xi^{m^2 j} = M_n(\xi^{m^2}, m^{-2}x)$$

Compte-tenu du théorème précédent :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(x) &\leq \sum_{1 \leq m \leq \sqrt{x}} \mathcal{M}_n(m^{-2}x) \leq D(A, n) \sum_{1 \leq m \leq \sqrt{x}} (\ln(m^{-2}x+1))^{-A} m^{-2}x \\ &\leq D(A, n) \sum_{1 \leq m \leq \sqrt[4]{x}} (\ln(m^{-2}x+1))^{-A} m^{-2}x + D(A, n) \sum_{\sqrt[4]{x} < m \leq \sqrt{x}} (\ln(m^{-2}x+1))^{-A} m^{-2}x \end{aligned}$$

Pour tout entier m vérifiant $1 \leq m \leq \sqrt[4]{x}$ on a :

$$(\ln(m^{-2}x+1))^{-A} \leq (\ln(\sqrt{x}+1))^{-A} \leq \mathfrak{m}^{-A} (\ln(x+1))^{-A}$$

où le nombre strictement positif $\mathfrak{m}$ est égal au minimum :

$$\min_{x \geq 1} \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\ln(x+1)}$$

Pour tout entier m vérifiant $\sqrt[4]{x} < m \leq \sqrt{x}$ on a :

$$(\ln(m^{-2}x + 1))^{-A} \leq (\ln 2)^{-A}$$

Par suite on obtient successivement :

$$\mathcal{L}_n(x) \leq D(A, n) m^{-A} (\ln(x+1))^{-A} \sum_{1 \leq m \leq \sqrt[4]{x}} m^{-2}x + D(A, n) (\ln 2)^{-A} \sum_{\sqrt[4]{x} < m \leq \sqrt{x}} m^{-2}x$$

$$\mathcal{L}_n(x) \leq \frac{\pi^2}{6} D(A, n) m^{-A} (\ln(x+1))^{-A} x + D(A, n) (\ln 2)^{-A} x^{\frac{3}{4}}$$

D'où immédiatement la conclusion.

Corollary 1.3. *Soit un entier naturel $N \geq 1$. La série de fonctions définies sur $\mathbb{T} \times [1, +\infty[$*

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, N)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} \xi^k$$

est uniformément convergente. En conséquence, on a :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, N)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(Nk)}{k} = 0$$

Proof. 1. Pour tout entier naturel $k \geq 1$ vérifiant $\text{pgcd}(k, N) = 1$ on peut écrire :

$$\mu(k) \xi^k = M_N(\xi, k) - M_N(\xi, k-1)$$

Par la transformation d'Abel on obtient :

$$\sum_{\substack{m < k \leq n \\ \gcd(k, N)=1}} \frac{\mu(k)}{k^s} \xi^k = \frac{1}{n^s} M_N(\xi, n) - \frac{1}{(m+1)^s} M_N(\xi, m) + \sum_{m < k < n} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) M_N(\xi, k)$$

Par suite il vient :

$$\left| \sum_{\substack{m < k \leq n \\ \gcd(k, N)=1}} \frac{\mu(k)}{k^s} \xi^k \right| \leq \frac{1}{n^s} \mathcal{M}_N(n) + \frac{1}{(m+1)^s} \mathcal{M}_N(m) + \sum_{m < k < n} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) \mathcal{M}_N(k)$$

Cependant, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout entier $k \geq 1$ on ait :

$$0 < \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \leq \frac{K}{(k+1)^s k}$$

Donc, *ayant choisi* $A > 1$, pour m assez grand et grâce au théorème ci-dessus on aboutit à

$$\left| \sum_{\substack{m < k \leq n \\ \gcd(k, N)=1}} \frac{\mu(k)}{k^s} \xi^k \right| \leq \frac{1}{n^s} \mathcal{M}_N(n) + \frac{1}{(m+1)^s} \mathcal{M}_N(m) + \sum_{m < k < n} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) \mathcal{M}_N(k)$$

$$\left| \sum_{\substack{m < k \leq n \\ \gcd(k, N)=1}} \frac{\mu(k)}{k^s} \xi^k \right| \leq 2D(A, N) \frac{1}{(\ln(m+1))^A m^{s-1}} + D(A, N) K \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k+1))^A k^s}$$

Et enfin à la majoration uniforme :

$$\sup_{(\xi, s) \in \mathbb{T} \times [1, +\infty[} \left| \sum_{\substack{m < k \leq n \\ \gcd(k, N)=1}} \frac{\mu(k)}{k^s} \xi^k \right| \leq D(A, N) \left(\frac{2}{(\ln(m+1))^A} + K \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k+1))^A k} \right)$$

2. La série de fonctions continues de la variable (ξ, s) appartenant à $\mathbb{T} \times [1, +\infty[$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, N)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} \xi^k$$

est donc convergente et sa somme S est une fonction continue sur $\mathbb{T} \times [1, +\infty[$. Désignant par ζ la fonction zéta de Riemann, par $\mathfrak{P}_N$ l'ensemble des nombres premiers qui sont facteurs premiers de N , une des propriétés de la fonction μ de Moebius est :

$$S(1, s) = \frac{1}{\zeta(s)} \prod_{p \in \mathfrak{P}_N} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$$

De là on tire :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, N)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = S(1, 1) = \lim_{s \rightarrow 1^+} S(1, s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{1}{\zeta(s)} \prod_{p \in \mathfrak{P}_N} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} = 0$$

Enfin, pour tout entier $k \geq 1$ le nombre $\mu(Nk)$ est nul si les nombre N et k ont un facteur premier commun, c'est-à-dire ne sont pas premiers-entre-eux.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(Nk)}{k} = \mu(N) \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, N)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

Corollary 1.4. Soit un entier naturel $N \geq 1$. La série de fonctions définies sur $\mathbb{T} \times [1, +\infty[$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, N)=1}}^{\infty} \frac{\lambda(k)}{k^s} \xi^k$$

est uniformément convergente. En conséquence, on a :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, N)=1}}^{\infty} \frac{\lambda(k)}{k} = 0$$

Proof. **1.** De manière absolument analogue à celle du corollaire précédent on obtient :

$$\sup_{(\xi, s) \in \mathbb{T} \times [1, +\infty[} \left| \sum_{\substack{m < k \leq n \\ \gcd(k, N)=1}} \frac{\lambda(k)}{k^s} \xi^k \right| \leq D_{\lambda}(A, N) \left(\frac{2}{(\ln(m+1))^A} + K \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(k+1))^A k} \right)$$

2. La série de fonctions continues de la variable (ξ, s) appartenant à $\mathbb{T} \times [1, +\infty[$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, N)=1}}^{\infty} \frac{\lambda(k)}{k^s} \xi^k$$

est donc convergente et sa somme S_λ est une fonction continue sur $\mathbb{T} \times [1, +\infty[$. Désignant par ζ la fonction dzéta de Riemann, par $\mathfrak{P}_N$ l'ensemble des nombres premiers qui sont facteurs premiers de N , une des propriétés de la fonction λ de Liouville est :

$$S_\lambda(1, s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \prod_{p \in \mathfrak{P}_N} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) \prod_{p \in \mathfrak{P}_N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

De là on tire :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, N)=1}}^{\infty} \frac{\lambda(k)}{k} = S_\lambda(1, 1) = \lim_{s \rightarrow 1} S_\lambda(1, s) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \prod_{p \in \mathfrak{P}_N} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) \prod_{p \in \mathfrak{P}_N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 0$$

Il est possible maintenant de construire deux suites de fonctions paires spéciales.

Th*eorème 1.5. *Pour tout entier naturel $\nu \geq 1$ les fonctions F_ν et G_ν définies sur le cercle $\mathbb{T}$ par les formules*

$$F_\nu(\xi) = \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, \nu)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} (\xi^k + \bar{\xi}^k) \quad \text{et} \quad G_\nu(\xi) = \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, \nu)=1}}^{\infty} \frac{\lambda(k)}{k} (\xi^k + \bar{\xi}^k)$$

appartiennent au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$.

Proof. Les corollaires (6) et (7) montrent que les formules ci-dessus définissent des fonctions continues sur $\mathbb{T}$, évidemment paires. Compte-tenu du point (3) de la proposition (3), il suffit maintenant de démontrer que pour tout entier $N \geq 1$ on a :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, \nu)=1}}^{\infty} \frac{\mu(Nk)}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, \nu)=1}}^{\infty} \frac{\lambda(Nk)}{k} = 0$$

S'agissant de la première égalité, notant $\mathcal{N}$ le *ppcm* de ν et N , et grâce au corollaire (6) on a :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, \nu)=1}}^{\infty} \frac{\mu(Nk)}{k} = \mu(N) \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, \nu)=\gcd(k, N)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, \mathcal{N})=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

S'agissant de la seconde égalité, parce que la fonction de Liouville est complètement multiplicative et grâce au corollaire (7) on a :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, \nu)=1}}^{\infty} \frac{\lambda(Nk)}{k} = \lambda(N) \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, \nu)=1}}^{\infty} \frac{\lambda(k)}{k} = 0$$

L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension infinie, comme conséquence de la proposition suivante. Par ailleurs, il est à noter que J.P. Kahane et E. Saias [3] ont étudié des questions en partie connexes à cette construction.

Proposition 1.3. *On considère les sous-familles $(F_p)_{p \in \mathfrak{P}}$ et $(G_p)_{p \in \mathfrak{P}}$ où $\mathfrak{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers :*

$$F_p(\xi) = \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, p)=1}}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} (\xi^k + \bar{\xi}^k) \quad \text{et} \quad G_p(\xi) = \sum_{\substack{k=1 \\ \gcd(k, p)=1}}^{\infty} \frac{\lambda(k)}{k} (\xi^k + \bar{\xi}^k)$$

Les familles $(F_p)_{p \in \mathfrak{P}}$ et $(G_p)_{p \in \mathfrak{P}}$ sont libres.

Proof. Soient une sous-famille finie $(p_1, \dots, p_n)$ de nombres premiers distincts les uns des autres et une famille finie de nombres complexes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, telles qu'on ait

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i F_{p_i} = 0$$

Pour tout nombre premier p et tout entier $k \geq 1$ on note :

$$a_{p,k} = \frac{\mu(k)}{k} \quad \text{si } k \notin p\mathbb{N} \quad \text{et} \quad a_{p,k} = 0 \quad \text{si } k \in p\mathbb{N}$$

Alors dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{p_i,k} \right) (\xi^k + \bar{\xi}^k) = 0$$

Donc, pour tout entier $k \geq 1$ il vient :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{p_i,k} = 0$$

Soit un nombre premier q distinct de tous les p_i . Alors pour tout indice i on a :

$$a_{p_i,q} = \frac{\mu(q)}{q} = -\frac{1}{q}$$

D'où l'on tire :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

Par ailleurs, on constate que pour tout couple (i, j) d'indices on a :

$$a_{p_i,p_j} = \frac{\mu(p_j)}{p_j} = -\frac{1}{p_j} \quad \text{si } i \neq j \quad \text{et} \quad a_{p_i,p_i} = 0$$

Pour tout indice j on obtient donc :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i = 0$$

En conséquence tous les coefficients λ_i sont nuls. La démonstration pour la famille $(G_p)_{p \in \mathfrak{P}}$ est la même.

Remark 1.1. *Il est possible d'exprimer les fonctions F_p à l'aide de la fonction F_1 comme le montre les calculs qui suivent.*

$$\begin{aligned} F_1(\xi) - F_p(\xi) &= \sum_{k \in p\mathbb{N}} \frac{\mu(k)}{k} (\xi^k + \bar{\xi}^k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(pj)}{pj} (\xi^{pj} + \bar{\xi}^{pj}) \\ &= -\frac{1}{p} \sum_{\substack{j=1 \\ \gcd(j,p)=1}}^{\infty} \frac{\mu(j)}{j} (\xi^{pj} + \bar{\xi}^{pj}) = -\frac{1}{p} F_p(\xi^p) \end{aligned}$$

D'où, pour tout entier naturel m , les relations :

$$\frac{1}{p^m} F_p(\xi^{p^m}) = \frac{1}{p^m} F_1(\xi^{p^m}) + \frac{1}{p^{m+1}} F_p(\xi^{p^{m+1}})$$

qu'on peut sommer de 0 à ν pour obtenir :

$$F_p(\xi) = \sum_{m=0}^{\nu} \frac{1}{p^m} F_1(\xi^{p^m}) + \frac{1}{p^{\nu+1}} F_p(\xi^{p^{\nu+1}})$$

Comme la fonction F_p est bornée parce que continue sur $\mathbb{T}$, en prenant la limite sur l'entier ν on aboutit à l'égalité :

$$F_p(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^m} F_1(\xi^{p^m})$$

De même on obtient :

$$G_p(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^m} G_1(\xi^{p^m})$$

Cette remarque conduit à la proposition suivante qui consacre le fait que l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension infinie.

Proposition 1.4. *Soit une fonction g appartenant au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$, distincte de la fonction nulle. Alors pour tout entier naturel $n \geq 1$ la fonction g_n définie par*

$$g_n(\xi) = g(\xi^n)$$

appartient au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ et on dispose de l'application linéaire continue injective :

$$l^1 \xrightarrow{T_g} \mathcal{E} \quad T_g x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$$

Proof. Les fonctions g_n sont clairement paires, et leurs coefficients de Fourier sont :

$$\widehat{g_n}(m) = \begin{cases} \widehat{g}\left(\frac{m}{n}\right) & \text{si } m \in n\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } m \notin n\mathbb{Z} \end{cases}$$

En particulier $\widehat{g_n}(0) = \widehat{g}(0) = 0$. Soit un entier $N \geq 1$, et considérons $d = \text{pgcd}(N, n)$. On a :

$$N = N_n d \quad ; \quad n = n' d \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(N_n, n') = 1$$

L'application

$$\{q \in \mathbb{N}^* ; n \text{ divise } qN\} \longrightarrow \{l \in \mathbb{N}^* ; N_n \text{ divise } l\} \quad q \longmapsto \frac{qN}{n}$$

est une bijection. En effet elle est évidemment injective, puis étant donné un multiple $l = N'k$ de N' , on a :

$$(n'k)N = (n'k)(N_n d) = (n'd)(N_n k) = n(N_n k) = n l$$

de sorte que l'entier $q = n'k$ est un antécédent de l'entier l par cette application. Par suite, pour tout rayon r appartenant à $]0, 1[$ on obtient :

$$\sum_{q=1}^{\infty} \widehat{g_n}(Nq) r^{Nq} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}(N_n k) (r^n)^{N_n k}$$

Comme la fonction g appartient au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$, il vient :

$$\lim_{r \nearrow 1} \sum_{q=1}^{\infty} \widehat{g_n}(Nq) r^{Nq} = \lim_{s \nearrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}(N_n k) s^{N_n k} = 0$$

Cela pour tout entier $N \geq 1$. Les fonctions g_n appartiennent donc au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$.

L'existence de l'application linéaire continue :

$$l^1 \xrightarrow{T_g} \mathcal{E} \quad T_g x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$$

est évidente car les fonctions g_n sont uniformément bornées sur $\mathbb{T}$. Comme la fonction g appartient au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ et n'est pas nulle, elle n'est pas non plus constante, de sorte qu'on dispose de l'entier naturel

$$K = \min\{k \in \mathbb{N}^* ; \widehat{g}(k) \neq 0\}$$

On a $K \geq 1$ car $\widehat{g}(0) = 0$, vu que la fonction g appartient à $\mathcal{E}$. Soit un entier $n \geq 1$. D'une part on a :

$$\widehat{g_n}(nK) = \widehat{g}(K) \neq 0$$

D'autre part, si l'entier j vérifie $1 \leq j < nK$ et si n divise j alors :

$$\widehat{g_n}(j) = \widehat{g}\left(\frac{j}{n}\right) = 0$$

Et bien sûr $\widehat{g_n}(j) = 0$ si n ne divise pas j . Donc on obtient :

$$K_n = \min\{k \in \mathbb{N}^* ; \widehat{g_n}(k) \neq 0\} = nK$$

Soit une suite sommable $x = (x_n)_{n \geq 1}$ telle qu'on ait $T_g(x) = 0$. Pour tout entier $m \geq 1$ on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \widehat{g_n}(m) = 0$$

Faisant successivement $m = K, m = 2K, \dots$ on obtient

$$\begin{aligned} x_1 \widehat{g}(K) &= 0 \\ x_1 \widehat{g_1}(2K) + x_2 \widehat{g}(K) &= 0 \\ &\vdots \\ x_1 \widehat{g_1}(nK) + \dots + x_{n-1} \widehat{g_{n-1}}(nK) + x_n \widehat{g}(K) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De là immédiatement $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots$

Autre construction de fonctions périodiques paires spéciales

La proposition précédente suggère une construction possible de fonctions paires spéciales, sous la forme $f \circ \varphi$ à partir d'une telle fonction f , où φ désigne une fonction convenable du cercle $\mathbb{T}$ dans lui-même. Les fonctions φ considérées ici seront les fonctions

$$\mathbb{T} \xrightarrow{\varphi_\alpha} \mathbb{T} \quad \varphi_\alpha(\xi) = \xi^\alpha = \exp(i \alpha \mathcal{A}(\xi))$$

où α est un nombre réel et $\mathcal{A}(\xi)$ la détermination principale de l'argument :

$$-\pi < \mathcal{A}(\xi) \leq \pi$$

La fonction φ_α n'est pas continue en -1 , cependant :

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow -1 \\ \Im m(\xi) < 0}} \varphi_\alpha(\xi) = \overline{\varphi_\alpha(-1)}$$

de sorte que pour toute fonction continue paire f définie sur $\mathbb{T}$ la fonction composée $f \circ \varphi_\alpha$ est définie et continue sur $\mathbb{T}$, et bien sûr paire car pour tout ξ de $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$ on a :

$$\overline{\varphi_\alpha(\xi)} = \varphi_\alpha(\bar{\xi})$$

Il est commode d'observer l'égalité

$$f \circ \varphi_{-\alpha} = f \circ \varphi_\alpha$$

Proposition 1.5. *Si α désigne un nombre rationnel et si la fonction f appartient au sous-espace $\mathcal{E}$, alors la fonction composée $f \circ \varphi_\alpha$ appartient au sous espace $\mathcal{E}$. De plus pour tout système $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de nombres rationnels distincts les uns des autres le système*

$$(f \circ \varphi_{\alpha_1}, \dots, f \circ \varphi_{\alpha_n})$$

est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

Pour tout nombre réel α et pour toute fonction f du sous-espace $\mathcal{E}$, la fonction composée $f \circ \varphi_\alpha$ appartient au sous espace $\mathcal{E}$.

Proof. Le nombre rationnel α s'écrit $b^{-1}a$ et il est loisible de supposer que les nombres entiers a et b satisfont $a > 0$ et $b > 0$. Comme on a l'égalité

$$f \circ \varphi_\alpha = (f \circ \varphi_{b^{-1}}) \circ \varphi_a$$

et compte tenu de la proposition (11) il suffit de démontrer que la fonction $f \circ \varphi_{b^{-1}}$ appartient au sous espace $\mathcal{E}$. Des calculs élémentaires montrent que pour tout entier $m \geq 1$ on a :

$$\widehat{f \circ \varphi_{b^{-1}}}(m) = \widehat{f}(mb)$$

Par suite pour tout entier $N \geq 1$ et pour tout r de $[0, 1[$ on a :

$$\sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f \circ \varphi_{b^{-1}}}(qN) r^{qN} = r^{-b} \sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f}(qNb) r^{qNb}$$

Pour tout entier $N \geq 1$ il vient donc :

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f \circ \varphi_{b^{-1}}}(qN) r^{qN} = 0$$

Les nombres rationnels α_j s'écrivent $b_j^{-1}a_j$ et il est loisible de supposer que les nombres entiers a_j et b_j satisfont $a_j > 0$ et $b_j > 0$. On note $b = \text{ppcm}(b_1, \dots, b_n)$ et on a : $b = b_j d_j$. Soit un système $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de nombres complexes tel qu'on ait

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j (f \circ \varphi_{\alpha_j}) = 0$$

Pour tout η de $\mathbb{T}$ il vient donc :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f(\eta^{d_j a_j}) = 0$$

C'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j (f \circ \varphi_{d_j a_j}) = 0$$

Cependant la condition $b_j^{-1}a_j \neq b_k^{-1}a_k$ entraîne la condition $d_j a_j \neq d_k a_k$. Mais alors la proposition (11) montre que les nombres complexes λ_j sont tous nuls.

Soit une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de nombres rationnels de limite α . Grâce à l'inégalité générale

$$|\xi^\alpha - \xi^\beta| \leq \pi |\alpha - \beta|$$

et au fait que la fonction continue f est uniformément continue, la suite de fonctions $(f \circ \varphi_{\alpha_n})_{n \geq 1}$ est uniformément convergente de limite la fonction $f \circ \varphi_\alpha$. Le sous-espace $\mathcal{E}$ étant fermé dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ on obtient l'appartenance de $f \circ \varphi_\alpha$ au sous-espace $\mathcal{E}$.

Une propriété des fonctions périodiques paires spéciales

Proposition 1.6. *Toute fonction paire spéciale distincte de la fonction nulle, c'est-à-dire toute fonction de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ exceptée la fonction nulle, possède la propriété :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)| = +\infty$$

Proof. Soit une fonction f du sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$. Supposons qu'elle possède la propriété :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < +\infty$$

Comme pour tout entier naturel N on a aussi :

$$\sum_{q=1}^{\infty} |\widehat{f}(qN)| < +\infty$$

il est possible d'intervertir les limites dans les égalités

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f}(qN) r^{qN} = 0$$

de sorte que tout entier naturel N on obtient :

$$\sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f}(qN) = 0$$

On dispose de la suite de mesures bornées $(\mu_N)_{N \geq 1}$ sur $\mathbb{N}^*$ chacune définie par :

$$\mu_N(A) = \sum_{q \in A} \widehat{f}(qN)$$

Ces mesures ne sont pas, *a priori*, positives mais différence de deux mesures bornées positives. On désigne par $E(N)$ le sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$ formé des entiers naturels multiples de N , et par $(p_j)_{j \geq 1}$ la suite croissante de tous les nombres premiers. Pour tout entier $k \geq 1$ la formule de Poincaré donne

$$\mu_1(E(p_1) \cup \dots \cup E(p_k)) = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq k} \mu_1(E(p_{j_1}) \cap \dots \cap E(p_{j_r})) \right)$$

Comme les entiers p_j sont des nombres premiers distincts les uns des autres, on a :

$$E(p_{j_1}) \cap \dots \cap E(p_{j_r}) = E(p_{j_1} \dots p_{j_r})$$

D'où la formule :

$$\mu_1(E(p_1) \cup \dots \cup E(p_k)) = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq k} \mu_1(E(p_{j_1} \dots p_{j_r})) \right)$$

Mais la mesure bornée μ_1 satisfait la propriété

$$\mu_1(E(N)) = \sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f}(qN) = 0$$

Pour tout entier naturel N , donc pour tout entier $k \geq 1$ il vient :

$$\mu_1(E(p_1) \cup \dots \cup E(p_k)) = 0$$

Et en définitive :

$$\mu_1 \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E(p_j) \right) = \mu_1 \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E(p_1) \cup \dots \cup E(p_k)) \right) = \lim_k \mu_1(E(p_1) \cup \dots \cup E(p_k)) = 0$$

Comme $\{1\}$ est le complémentaire de $\bigcup_{j=1}^{\infty} E(p_j)$ dans $\mathbb{N}^* = E(1)$ il vient :

$$\widehat{f}(1) = \mu_1(\{1\}) = \mu_1(E(1)) - \mu_1 \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E(p_j) \right) = 0 - 0 = 0$$

Appliquant ce qui précède successivement aux mesures $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_N, \dots$ on obtient

$$\widehat{f}(2) = \mu_2(\{1\}) = 0 \quad \dots \quad \widehat{f}(N) = \mu_N(\{1\}) = 0 \quad \dots$$

En conséquence tous les coefficients de Fourier de la fonction paire f sont nuls. Donc la fonction continue f est la fonction nulle.

Remark 1.2. 1. Si la fonction f du sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est primitive d'une fonction de $L^1(\mathbb{T})$ on a la propriété

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \widehat{f}(n) = 0$$

Le classique théorème de Tauber permet d'écrire que pour entier $N \geq 1$ on a

$$\sum_{q=1}^{\infty} \widehat{f}(qN) = 0$$

étant entendu que les séries concernées sont convergentes, mais ne sont peut-être pas absolument convergentes.

2. Si la fonction f appartenant à $\mathcal{E}$, est primitive d'une fonction de $L^p(\mathbb{T})$ avec $1 < p \leq +\infty$, alors elle est égale à la fonction nulle car dans ce cas la série de ses coefficients de Fourier est absolument convergente [6].

3. Une fonction lipchitzienne 2π -périodique étant sur chaque période primitive d'une fonction essentiellement bornée, ne peut être paire et spéciale sans être la fonction nulle. En fait, une fonction paire α -lipchitzienne sur $\mathbb{T}$ avec $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ et distincte de la fonction nulle ne peut, non plus, appartenir à $\mathcal{E}$ car la série de ses coefficients de Fourier est absolument convergente [6].

References

- [1] H. Davenport. On some infinite series involving arithmetical functions, *Quart. J. Math.* 8 (1937) pp. 8-13.
- [2] H. Davenport. On some infinite series involving arithmetical functions (II), *Quart. J. Math.* 8 (1937) pp. 313-320.
- [3] J.P. Kahane et E. Saias. Sur l'exemple d'Euler d'une fonction complètement multiplicative de somme nulle. *CRAS Série I, Math., Elsevier* 2016 [⟨hal – 01288587⟩](#).
- [4] E. Kowalski. Un cours de théorie analytique des nombres. *Cours spécialisés 13, SMF* 2004.
- [5] A. Sebbar. Harmonic numbers, harmonic series and zeta function. *Communication personnelle*.
- [6] A. Zygmund. Trigonometrical series, vol I, *Cambridge at the University press*, 1959.