APPLICATION OF THE ORDER STATISTICS TO THE FAULT TOLERANT SYSTEMS

ZASTOSOWANIE STATYSTYK PORZĄDKOWYCH DO SYSTEMÓW TOLERUJĄCYCH USZKODZENIA

Karol Andrzejczak

Poznań University of Technology

e-mail: karol.andrzejczak@put.poznan.pl

Abstract: Various models of ordered random variables having different interpretations have been introduced and studied extensively in the literature. The most popular of these are order statistics obtained by arranging n random variables (rv's) in non-decreasing order of magnitude. Order statistics appear in many areas of statistical theory and applications including quality control, robustness, outlier detection, and reliability analysis. In this paper we study the construction of the functional and numerical reliability characteristics for the fault tolerant systems with so called "k-out-of-n" threshold reliability structure based on order statistics.

Keywords: order statistics, "k-out-of-n" threshold structure, regularized beta function

Streszczenie: Różnorodne modele uporządkowanych zmiennych losowych mających różne interpretacje były wprowadzone i intensywnie badane w literaturze. Najpopularniejszymi z nich są statystyki porządkowe otrzymane poprzez ustawienie n zmiennych losowych w ich niemalejącym porządku. Statystyki porządkowe pojawiają się w wielu obszarach statystyki teoretycznej i zastosowań obejmujących sterowanie jakością, wytrzymałość, wykrywanie wartości odstających i analizę niezawodności. W tej pracy dokonujemy przeglądu oraz badania konstrukcji funkcyjnych i liczbowych charakterystyk niezawodnościowych dla systemów tolerujących uszkodzenia z tak zwaną „k-z-n” niezawodnościową strukturą progową w oparciu o statystyki porządkowe.

Słowa kluczowe: statystyki porządkowe, struktura progowa „k-z-n”, regulowana funkcja beta

APPLICATION OF THE ORDER STATISTICS TO THE FAULT TOLERANT SYSTEMS

1. Introduction

Engineering systems, components and devices are not perfect. A perfect design is the one that remains operational and attains system's objective without failure during a preselected life. This is the deterministic view of an engineering system. This view is idealistic, impractical, and economically infeasible. Even if technical knowledge is not a limiting factor in designing, manufacturing, constructing and operating a perfect design, the cost of development, testing, materials and engineering analysis may far exceed economic prospects for such a system. Therefore, practical and economical limitations dictate the use of not-so-perfect designs.

Reliability characteristics of a compound technical system which tolerate undesirable events, particularly its certain damages are usually determined by its decomposition into components, establishing its reliability structure and estimation of component reliability characteristics (see [2], [8]). Designers, manufacturers and end users, however, strive to minimize the occurrence and recurrence of failures. In order to minimize failures in engineering systems, the designer must understand "why" and "how" failures occur. This would help them prevent failures. In order to maximize system performance, it is also important to know how often such failures may occur. This involves predicting the occurrence of failures. It will allow for the exclusion of such occurrences or making the construction of an object resistant by designing different kind of superfluous configuration and the organization of the preventive action. Thus already in the design phase one should consider the requirements concerning, among others, the assumed operational availability of a designed technical object. To design and build the complex engineering system meeting the requirements concerning its safety, availability and functionality, detailed extensive knowledge is essential, concerning, among others, forecasting how often and when the undesirable events will occur during its exploitation time (see [3]). Developing this knowledge some modern methods of OSM (order statistics methods) were applied in this paper for the construction of functional and numerical reliability characteristics for the class of complex technical systems resistant to the determined number of the undesirable random events. Presented OSM methods include also the redundant systems with the " k -out-of- n " threshold reliability structure. Some of these methods are used for the construction of the extreme values models and for the shock damages process. These methods and applications of OSM, especially the theory of extreme values, have received considerable attention recently (see [1], [4], [5], [6]).

This paper consists of several parts. In section 2 some basic notations are introduced and the issues of this work are formulated, i.e. formal possibilities of applying order statistics in examining the reliability of the fault tolerant systems. Section 3 gives the assumptions by which it is possible to apply the binomial distribution for appointing reliability characteristics for the system exploited for a certain time. Moreover, an example of the fault tolerant system is implemented for which the reliability function is appointed. In the next sections computational possibilities of the functional and number characteristics are shown on this example. In section 4 a regularized beta function is defined using the incomplete beta function. Properties of the regularized beta function are formulated and its usefulness is shown for symbolic and numerical calculations of the basic reliability characteristics. This usefulness is documented by calculations for the implemented example of the system. In the last fifth section of this paper a quantile function is introduced and possibilities of the applications of this function are shown for appointing the time of using “ k -out-of- n ” threshold system for reaching the established reliability level.

2. Basic assumptions and the problem formulation

The formal formulation problem is brought about to the class of the fault tolerant systems with the threshold reliability structure of type “ k -out-of- n ” applying the English convention of the record (see [9]). Namely, an n -component system that *fails* (will lose the ability to function) is called a k -out-of- $n:F$ system only when at least k of the n components fail. On the other hand, an n -component system *works* (or is “good”) only when at least k of the n components work (or are good) is called a k -out-of- $n:G$ threshold system. Let us notice, that based on given definitions the thresholds systems k -out-of- $n:F$ and an $(n-k+1)$ out-of- $n:G$ are equivalent.

In the next part of this paper the attention is focused on the systems with the threshold structure „ k -out-of- $n:F$ ” and in the record the letter F will be omitted, namely we will be writing „ k -out-of- n ” instead of k -out-of- $n:F$. The special cases of the threshold “ k -out-of- n ” reliability structure are obviously the parallel and series structures. Of course the series structure is a threshold structure of type “1-out-of- n ”, while the parallel structure is a threshold structure of type “ n -out-of- n ”. The threshold structure “ k -out-of- n ” is very popular in the modelling of the redundant technical objects tolerating damages or adverse events to a certain extent. It has a wide spectrum of applications in modelling both industrial and military objects. The examples of fault-tolerant or adverse events objects are the deck information system in the cockpit, the multiengine system in an airplane, and the multi-pump system in a hydraulic control system. For example, it may be possible to drive a car with a V8 engine only if four cylinders are firing. However, if less than four cylinders fire, then the automobile cannot be driven. Thus, the functioning of the engine may be represented by the system with 5-out-of-8 threshold structure.

The system is tolerant of failures of up to four cylinders for the minimum functioning of the engine. System with supplies may also be modelled by the k -out-of- n threshold system. For example, a vehicle with four tires necessary to drive is usually equipped with one spare tire. In this case the vehicle cannot be driven if at least 2-out-of-5 tires do not meet the performance requirements.

Adverse events of the fault tolerant system occur at random moments. We assume that they are described as a sequence of unstructured and independent random variables $T_1, \dots, T_n$ with the same distribution determined by the one of functions, i.e. the cumulative distribution function (cdf) also called unreliability function $F(t)$, the reliability function $R(t) = 1 - F(t)$ or probability density function (pdf) $f(t)$. Ordered in a non-decreasing way sequence of random variables $T_{1:n} \leq \dots \leq T_{n:n}$ determining moments of damage of the system components or the moments adverse moments occurrence create order statistics. Due to the occurrence of order relation, order statistics no longer have an independent distribution.

Order statistics are applied to testing durability of materials and in the field of quality control. The purpose of introduction order statistics in this paper is their or their function application to appointing functional or numerical reliability characteristics for the system with threshold structure of k -out-of- n type.

3. Application of the binomial distribution to the reliability problems of the fault tolerant system

In this section we focus our attention on application of the order statistic $T_{k:n}$ to construct functional and numerical characteristics for the class of systems with “ k -out-of- n ” threshold structure. We will demonstrate that, if adverse events (e.g. components fail) appear independently with the same unreliability function F , then the probability of „ k -out-of- n ” system failure can be calculated using the binomial distribution.

Let $N(t)$ be the number of random events or number of failed components in the interval $(0, t]$ of using the system. The random number $N(t)$ has the binomial distribution with parameters n and $F(t)$, and we symbolically denote it by $N(t) \sim \text{bin}(n, F(t))$. The probability that „ k -out-of- n ” system will fail for $k = 0, 1, \dots, n$ is given by the formula:

$$\Pr(N(t) = k) = \binom{n}{k} (F(t))^k (R(t))^{n-k} \quad (1)$$

where $\Pr$ denotes probability function, F unreliability function and R reliability function for the system component. Moreover, cumulative distribution function (or unreliability function) $F_{k:n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Pr(T_{k:n} \leq t)$, reliability function $R_{k:n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Pr(T_{k:n} > t)$, density function $f_{k:n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF_{k:n}(t)}{dt}$ and hazard function $\lambda_{k:n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{k:n}(t)}{R_{k:n}(t)}$ for fault tolerant system with the threshold reliability structure

„ k -out-of- n ” can be calculated from the formulas (2), (3), (4), (5) using binomial distribution:

$$F_{k:n}(t) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} (F(t))^i (R(t))^{n-i} \quad (2)$$

$$R_{k:n}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (F(t))^i (R(t))^{n-i} \quad (3)$$

$$f_{k:n}(t) = n \binom{n-1}{k-1} (F(t))^{k-1} (R(t))^{n-k} f(t) \quad (4)$$

$$\lambda_{k:n}(t) = \frac{n \binom{n-1}{k-1} (F(t))^{k-1} (R(t))^{n-k} f(t)}{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (F(t))^i (R(t))^{n-i}} \quad (5)$$

where n is the number of system components or a total number of events in the considered time t , $k = 1, 2, \dots, n$ is the minimal number of system components or harmful events which will cause loss of the applicability of the system.

Of course, in the extreme case $k = 1$ the function (2), (3), (4) and (5) corresponds to the series systems and in the second extreme case for $k = n$ these functions corresponds to the parallel systems. Series and parallel reliability structures are often inappropriate for the modelling of real objects. The generalization of the series and parallel structures are just more flexible “ k -out-of- n ” type of structures.

Example.

We are considering the plumbing system of six pumps from which at least four must function correctly so that the system of water supply applies correctly. Each of pumps has constant hazard function $\lambda(t) = 0,0001625[1/h]$. We are interested in a problem of appointing the reliability of the hydraulic system during its using through 1000 [h].

Solution.

From requirements stood the hydraulic system of pumps results, that the structure of this system is 4-out-of-6: G and it is equivalent to 3-out-of-6: F system.

The probability of the correct functioning of this system we find using formula (3) for $t = 100$, $k = 3$ and $n = 6$. Of course at first we calculate the reliability of one pump and receive approximately $R(1000) \approx 0,85$, next we appoint reliability of the hydraulic system

$$\begin{aligned} R_{3:6}(1000) &= \sum_{i=0}^2 \binom{6}{i} (F(1000))^i (R(1000))^{6-i} \\ &\approx 0,85^6 + 6 \cdot 0,15 \cdot 0,85^5 + 15 \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^4 \approx 0,9526614. \end{aligned}$$

4. An application of the regularized beta function to the fault tolerant systems

From the relation between binomial sums and the incomplete beta function

$$I_x(k, n - k + 1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i} \quad (6)$$

where k, n are positive integers and $0 \leq x \leq 1$ we define regularized beta function I_x for $x = F(t)$:

$$I_{F(t)}(k, n - k + 1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{B(k, n - k + 1)} \int_0^{F(t)} u^{k-1} (1 - u)^{n-k} du \quad (7)$$

where $B(k, n - k + 1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 t^{k-1} (1 - t)^{n-k} dt$ for $k > 0$ and $n - k + 1 > 0$ is the complete beta function. Immediately from (2) and equation

$$I_x(k, n - k + 1) = 1 - I_{1-x}(n - k + 1, k) \quad (8)$$

we receive two useful relations in the symbolic calculation unreliability or reliability for the system with the threshold structure „ k -out-of- n ”:

$$F_{k:n}(t) = I_{F(t)}(k, n - k + 1) \quad (9)$$

$$R_{k:n}(t) = 1 - I_{F(t)}(k, n - k + 1) = I_{R(t)}(n - k + 1, k) \quad (10)$$

The regularized beta function is also denoted $I(z; a, b)$ and is implemented in the Wolfram Language as `BetaRegularized[z, a, b]` (see [10]). For the “ k -out-of- n ” systems this implementation for unreliability and reliability functions of the $T_{k:n}$ take the form

$$F_{k:n}(t) \stackrel{\text{Wolfram Language}}{=} \text{BetaRegularized}[F(t); k, n - k + 1] \quad (11)$$

$$R_{k:n}(t) \stackrel{\text{Wolfram Language}}{=} \text{BetaRegularized}[R(t); n - k + 1, k] \quad (12)$$

If $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$, then for $k = 1, \dots, n$

$$R_{k:n}(t) = 1 - I_{1-\exp(-\lambda t)}(k, n - k + 1) = I_{\exp(-\lambda t)}(n - k + 1, k) \quad (13)$$

Linking to data of hydraulic system we receive, for $t \geq 0$

$$R_{3:6}(t) = I_{\exp(-\lambda t)}(4, 3) = 15e^{-4\lambda t} \left(\frac{2}{3} e^{-2\lambda t} - \frac{8}{5} e^{-\lambda t} + 1 \right) \quad (14)$$

and for $t = 1000$ we find $R_{3:6}(1000) \approx 0,9526747$. Earlier in the example it was $R_{3:6}(1000) \approx 0,952661$. The difference between the calculations results from the rounding value of reliability function.

The four argument version `BetaRegularized[z1, z2, a, b]` is equivalent to $I(z_2; a, b) - I(z_1; a, b)$.

We can apply this Wolfram function to calculate probability that “ k -out-of- n ” system will fail in the period $(t_1, t_2]$

$$\Pr(t_1 < T_{(k)} \leq t_2) \stackrel{\text{Wolfram}}{=} \text{BetaRegularized}[F(t_1), F(t_2), k, n - k + 1] \quad (15)$$

or equivalently

$$\Pr(t_1 < T_{(k)} \leq t_2) \stackrel{\text{Wolfram}}{=} \text{BetaRegularized}[R(t_2), R(t_1), n - k + 1, k] \quad (16)$$

The results of calculations of probability that the system “ k -out-of-6” will fail in the periods $(0, 2000]$, $(2000, 3000]$, $(3000, \infty)$ [in hours] are gathered in Table 2. The results concerning the system of pumps, i.e. the system with the structure “3-out - of-6” are shown in bold.

Table 2. Fail probabilities for the “ k -out-of-6” systems for the three periods

System	Period in hours		
	$[0, 2000]$	$(2000, 3000]$	$(3000, \infty)$
1-out-of-6	0,857726...	0,088609...	0,053665...
2-out-of-6	0,529900...	0,214149...	0,255951...
3-out-of-6	0,215163...	0,211176 ...	0,573661...
4-out-of-6	0,054004...	0,106203...	0,839793...
5-out-of-6	0,007587...	0,027224...	0,965189...
6-out-of-6	0,000456...	0,002843...	0,996701...

Probability density function $f_{k:n}$ of time $T_{k:n}$ for $t \geq 0$, i.e. the time of the applicability of the “ k -out-of- n ” system is determined by differentiating regularized beta function $I_{F(x)}$

$$f_{k:n}(t) = \frac{d}{dt} \left(I_{F(t)}(k, n - k + 1) \right) \quad (17)$$

Using formula (17) we calculate pdf $f_{3:6}$ of order statistic $T_{3:6}$ for cdf given in example of pumps, i.e. $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

$$f_{3:6}(t) = \frac{d}{dt} \left(I_{1-e^{-\lambda t}}(3, 4) \right) = 60\lambda e^{-6\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^2 \quad (18)$$

Generally, if $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$, then for $t \geq 0$ and $k = 1, 2, \dots, n$

$$f_{k:n}(t) = \frac{\lambda(1-e^{-\lambda t})^{k-1}(e^{-\lambda t})^{n-k+1}}{B(k, n-k+1)} = \lambda n \binom{n-1}{k-1} (1-e^{-\lambda t})^{k-1} (e^{-\lambda t})^{n-k+1} \quad (19)$$

We may use pdf $f_{k:n}$ and reliability function $R_{k:n}$ to calculate hazard function $\lambda_{k:n}$ of order statistics $T_{k:n}$. For our “3-out-of-6” example of pumps system we find hazard function $\lambda_{3:6}$:

$$\lambda_{3:6}(t) = \frac{\frac{dI_{1-e^{-\lambda t}}(3,4)}{dt}}{I_{e^{-\lambda t}}(4,3)} = \frac{60\lambda e^{-6\lambda t}(e^{\lambda t}-1)^2}{15e^{-4\lambda t}\left(\frac{2}{3}e^{-2\lambda t}-\frac{8}{5}e^{-\lambda t}+1\right)} = \frac{4\lambda e^{-2\lambda t}(e^{\lambda t}-1)^2}{\frac{2}{3}e^{-2\lambda t}-\frac{8}{5}e^{-\lambda t}+1} \quad (20)$$

and for $\lambda = 0,0001625$

$$\lambda_{3:6}(t) = \frac{0,00065e^{-0,000325t}(e^{0,0001625t}-1)^2}{\frac{2}{3}e^{-0,000325t}-\frac{8}{5}e^{-0,0001625t}+1} \quad (21)$$

5. Application of the quantile function to setting the time of using the fault tolerant system

The alternative function to unreliability, probability density, reliability and intensity of damage functions universally used in theory and engineering practice is the so-called "quantile function" less common in practice. Theory and practice of quantile functions are discussed in a monograph [7]. We will adapt this function for the purposes of reliability examinations of the fault tolerant systems. For given unreliability F or reliability function R the quantile function is defined for $0 < p < 1$ in the following way:

$$Q(p) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{t \in \mathbb{R}: F(t) \geq p\} \quad (22)$$

or equivalently

$$Q(p) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{t \in \mathbb{R}: R(t) \leq 1 - p\} \quad (23)$$

where $\mathbb{R}$ denotes the set of real numbers.

Values $Q(p)$ of the quantile function are called quantiles. For given probability $p \in (0, 1)$ the value $Q(p)$ gives the time t of using a technical object, in which the object unreliability will grow to the probability p or the reliability will drop to probability $1 - p$. If the function F is absolutely continuous, then the infimum function can be replaced by the minimum function and $Q = F^{-1}$. In this case quantile function is the inverse of cdf F and is also called the *inverse cumulative distribution function* (shortly denoted icdf).

The quantile function $I_p^{-1}(k, n+1-k)$ is the inverse function to the regularized beta function $I_{F(t)}(k, n-k+1)$ and in Wolfram Language is implemented as `InverseBetaRegularized[p, k, n+1-k]`. This implementation for given functions unreliability F or reliability R can be applied to designating quantiles for "k-out-of-n" systems, i.e. for statistic $T_{(k)}$ solving one of the following equations:

$$\text{InverseBetaRegularized}[p; k, n-k+1] = F(t) \quad (24)$$

$$\text{InverseBetaRegularized}[1-p; n-k+1, k] = R(t) \quad (25)$$

The solution of the equation $I_p^{-1}(k, n+1-k) = F(t)$ in terms of the time for given unreliability function F and probability $p \in (0, 1)$, $n \geq 2$ and $k = 1, \dots, n$ is analogous as the solution of the inverted problem given by equation $I_{F(t)}(k, n-k+1) = p$. Alternatively, the solution of the equation $I_{1-p}^{-1}(n+1-k, k) = R(t)$ with regard to time t is analogous to solution of the equation $I_{R(t)}(n-k+1, k) = 1-p$. In each of these cases the solution t is the time of using system with structure “ k -out-of- n ” for which the value of the quantile function $Q_{k:n}(p) = F_{k:n}^{-1}(p)$ will grow to level p for given component unreliability function F .

Solving the equation $I_{F(t)}(k, n-k+1) = p$ or equivalently $I_{R(t)}(n-k+1, k) = 1-p$ for given in the pumps example component cumulative distribution $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$ we find the solution $t_p = F_{k:n}^{-1}(p)$ for the variable t as a function of p with parameters λ , k and n :

$$t_p(\lambda, k, n) = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{1}{1 - I_p^{-1}(k, n+1-k)} \right) = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{1}{I_{1-p}^{-1}(n+1-k, k)} \right) \quad (26)$$

where I_p^{-1} is the “inverse regularized beta function”.

In the conclusion of this paper the function (26) and its alternative equivalents were used to determine the quantiles of the range 0.95; 0.5 and 0.05 for “ k -out-of-6” system of six pumps listed previously in the earlier example for constant hazard function, i.e. $\lambda(t) = 0.0001625[1/h]$ and $k = 1, \dots, 6$. The calculation results are summarized in Table 3.

Table 3. Three range quantiles of „ k -out-of-6” system

System	Using time in hours		
	$p = 0,05$	$p = 0,5$	$p = 0,95$
1-out-of-6	52,609	710,92	3072,55
2-out-of-6	399,467	1890,07	5364,95
3-out-of-6	1023,05	3367,12	8027,01
4-out-of-6	1947,97	5317,88	11546,2
5-out-of-6	3333,06	8185,25	17027,7
6-out-of-6	5746,77	13633,7	29330,6

The derivative of a quantile function, i.e. a density quantile function may be another way of functional presentation of time distribution of the fault tolerant technical object with the structure of “ k -out-of- n ” type. This problem remains open.

6. Summary

The paper presents original and modern reliability research methods of technical objects which tolerate damage, namely there must appear at least k of undesired events out of n , so that the object loses the ability to function. Such objects are modelled as a multicomponent system with reliability structure of “ k -out-of- n ” type. The key to elaborating the presented methods were order statistics and their probability distributions. For appointing reliability systems characteristics was applied regularized beta function indexed by the unreliability or the reliability of the adverse event occurrence. In particular, for computer-aided symbolic and numerical computation were indicated functions in Wolfram Language, which has been illustrated with calculations for the hydraulic system of 6 pumps. Also a possibility of applying the quantile function has been shown for appointing the time of using the system tolerating damage for keeping the assumed level of reliability. Methods of calculation presented in this study do not exhaust further possibilities of their development for the purposes of reliability examinations of technical objects.

Acknowledgement

The presented research results executed under the subject of No 04/43/DSPB/0085, were funded with grants for education allocated by the Ministry of Science and Higher Education.

7. References

- [1] Ahsanullah M., Nevzorov V. B. Order Statistics: Examples and Exercises. Nova Science Publishers, 2005.
- [2] Andrzejczak K.: Charakterystyki niezawodnościowe złożonych systemów odnawialnych. Materiały Szkoły Niezawodności – Metody utrzymania gotowości systemów. PAN, Szczyrk 2008, 16-28.
- [3] Andrzejczak K.: Methods of the forecasting in the modeling of means of transport maintenance (in Polish). Rozprawy nr 496. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2013.
- [4] Balakrishnan N, Rao C.R. Order Statistics: Theory & Methods. Vol. 16. Handbook of Statistics. North-Holland; Amsterdam: 1998. Order statistics: an introduction; pp. 3–24.
- [5] Castillo E., Hadi A.S., Balakrishnan N., Sarabia J.M. Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering and Science, John Wiley and Sons, New York, 2005.
- [6] David H.A., Nagaraja H.N. Order Statistics. Third Edition. John Wiley, New York, 2003.
- [7] Gilchrist, W. Statistical Modelling with Quantile Functions. CRC Press, 2000.
- [8] Grabski F., Jąźwiński J. Funkcje o losowych argumentach w zagadnieniach niezawodności, bezpieczeństwa i logistyki. WKŁ, Warszawa 2008.

-
- [9] Kuo W., Zuo M.J. Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications. New York: John Wiley & Sons, 2003.
- [10] <https://reference.wolfram.com/language/> Wolfram Language Documentation (available 2015-10-13).

Karol Andrzejczak, DSc. Eng. graduated in Mathematics in 1980 at Adam Mickiewicz University, Poznan. Since then he has been working at the Institute of Mathematics at Poznan University of Technology (PUT). He received the PhD degree in Mathematical Sciences in 1987 and D.Sc. degree in Technical Sciences in 2014 from PUT. His scientific interests concern statistical methods and probabilistic modelling of technical systems – particularly availability, maintenance, safety and risk analysis of transportation means and systems. He is a member of the Polish Statistical Association, the Polish Society for Measurement, the Automatic Control and Robotics and the American Mathematical Society.

ZASTOSOWANIE STATYSTYK PORZĄDKOWYCH DO SYSTEMÓW TOLERUJĄCYCH USZKODZENIA

1. Wstęp

Systemy inżynierskie, urządzenia i ich elementy nie są doskonałe. Doskonały obiekt to taki, który pozostaje sprawny operacyjnie i jest zdolny do przeznaczonego działania w określonych warunkach użytkowania przez z góry określony czas eksploatacji. Takie deterministyczne spojrzenie na inżynierski system jest nazbyt idealistyczne i ekonomicznie nieuzasadnione. Nawet jeśli wiedza techniczna nie jest ograniczającym czynnikiem w projektowaniu, wytwarzaniu, doskonałym obsłudze, to koszty rozwoju produktu, jego testowania, dobierania materiałów, badań i analiz inżynierskich mogą być praktycznymi lub ekonomicznymi ograniczeniami.

Charakterystyki niezawodnościowe złożonego systemu tolerującego niepożądane zdarzenia, w szczególności pewne jego uszkodzenia są zwykle wyznaczane poprzez jego dekompozycję na elementy składowe, ustalenie jego struktury niezawodnościowej i ocenę charakterystyk niezawodnościowych elementów (zob. [2], [8]). Projektanci, producenci i końcowi użytkownicy obiektów technicznych starają się minimalizować możliwość pojawienia się lub powtórzenia się różnego rodzaju zdarzeń niepożądanych np. uszkodzenia elementów lub podzespołów systemu. Aby zminimalizować skutki pojawiających się zdarzeń niepożądanych (uszkodzeń) projektant musi wiedzieć dlaczego i jakie zdarzenia niepożądane mogą wystąpić w czasie użytkowania obiektu technicznego. Pozwoli to na niedopuszczanie do wystąpienia takich zdarzeń lub uodpornienie konstrukcji obiektu na skutki ich wystąpienia poprzez projektowanie różnego rodzaju układów nadmiarowych i organizację działań prewencyjnych. Tak więc już w fazie projektowania należy uwzględnić wszelkie wymagania dotyczące m. in. założonej gotowości operacyjnej projektowanego obiektu technicznego. Aby zaprojektować i zbudować złożony system inżynierski spełniający wymagania dotyczące jego bezpieczeństwa, gotowości i funkcjonalności niezbędna jest rozległa wiedza szczegółowa dotycząca m.in. prognozowania jak często i kiedy wystąpią zdarzenia niepożądane w czasie jego użytkowania (zob. [3]). Rozwijając tę wiedzę w niniejszej pracy zastosowano nowoczesne metody statystyk porządkowych (ang. OSM – ordered statistics methods) do konstrukcji funkcyjnych i liczbowych charakterystyk niezawodnościowych dla klasy złożonych systemów technicznych odpornych na określoną liczbę niepożądanych zdarzeń losowych. Przedstawione metody OSM obejmują również nadmiarowe systemy o progowej strukturze niezawodnościowej typu „ k z n ”. Część z tych metod jest zastosowana do konstrukcji modeli wartości ekstremalnych oraz do szokowego procesu uszkodzeń.

Metodą i zastosowaniom OSM zwłaszcza teorii wartości ekstremalnych poświęca się ostatnio dużo uwagi (zob. [1], [4], [5], [6]).

Niniejsza praca składa się z kilku części. W części 2 wprowadzone są podstawowe oznaczenia i sformułowana jest problematyka tej pracy, tj. formalne możliwości zastosowania statystyk pozycyjnych w badaniu niezawodności systemów tolerujących uszkodzenia. W części 3 podane zostały założenia przy których można zastosować rozkład dwumianowy do wyznaczania charakterystyk niezawodnościowych eksploatowanego przez określony czas systemu. Ponadto wprowadzony jest przykład systemu tolerującego uszkodzenia dla którego wyznaczona została funkcja niezawodności. W dalszych częściach tej pracy na przykładzie tego systemu pokazane są możliwości obliczeniowe charakterystyk funkcyjnych i liczbowych. W części 4 zdefiniowana jest regulowana funkcja beta za pomocą niepełnej funkcji beta. Sformułowane są własności regulowanej funkcji beta i wskazana jest jej użyteczność w symbolicznych i numerycznych obliczeniach charakterystyk niezawodnościowych. Użyteczność ta jest udokumentowana obliczeniami dla wprowadzonego przykładu systemu tolerującego uszkodzenia. W ostatniej piątej części tej pracy wprowadzona jest funkcja kwantylowa i pokazane są możliwości jej zastosowania do wyznaczania czasu użytkowania progowego systemu do osiągnięcia założonego poziomu niezawodności.

2. Podstawowe założenia i sformułowanie problemu

Formalne sformułowanie problemu jest sprowadzone do klasy systemów tolerujących uszkodzenia o progowej strukturze niezawodnościowej typu „ k z n ” stosując angielską konwencję zapisu (zob. [9]). Mianowicie, systemem o strukturze „ k -out-of- $n:F$ ” nazywamy n -elementowy system, który uszkodzi się (utraci zdolność do funkcjonowania) wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej k jego elementów uszkodzi się. Z kolei, n -elementowy system jest zdalny do użytkowania (jest „dobry”) wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej k jego elementów jest zdalnych do użytkowania jest nazywany systemem o strukturze progowej „ k -out-of- $n:G$ ”. Zauważmy, że na podstawie podanych definicji systemy o strukturach progowych „ k -out-of- $n:F$ ” oraz „ $(n-k+1)$ -out-of- $n:G$ ” są równoważne.

W dalszej części tej pracy uwaga jest poświęcona systemom o progowej strukturze „ k -out-of- $n:F$ ” i w zapisie litera F będzie pomijana. To znaczy będziemy pisać „ k -out-of- n ” zamiast „ k -out-of- $n:F$ ”. Szczególnymi przypadkami systemów progowych są oczywiście systemy o strukturze szeregowej i równoległej. Oczywiście struktura szeregowa jest strukturą progową typu „1-out-of- n ”, natomiast struktura równoległa jest strukturą progową typu „ n -out-of- n ”. Struktura progowa „ k -out-of- n ” jest bardzo popularna w modelowaniu nadmiarowych obiektów technicznych tolerujących do pewnego stopnia uszkodzenia lub zdarzenia niepożądane. Znajduje ona szerokie zastosowania zarówno w modelowaniu obiektów przemysłowych jak i wojskowych.

Obiektami tolerującymi uszkodzenia lub zdarzenia niepożądane są np. pokładowy system informacji w kokpicie, wielosilnikowy system w samolocie, sterowany system hydrauliczny wyposażony w wiele pomp. Przykładowo, jeżeli możliwe jest aby prowadzić samochód z silnikiem V8 tylko wtedy gdy co najmniej cztery cylindry spalają paliwo, to modelem działania takiego silnika jest system o strukturze progowej „5-out-of-8”. W tym przypadku system toleruje uszkodzenia aż czterech cylindrów dla „minimalnego” działania silnika. Modelem systemu z zapasami też może być system o strukturze progowej „ k -out-of- n ”. Na przykład pojazd z czterema oponami koniecznymi do jazdy, zwykle jest wyposażony w zapasową piątą oponę. W tym przypadku jeżeli co najmniej dwie opony spośród pięciu nie spełniają wymagań użytkowych, to pojazd nie może być użytkowany. Zdarzenia niepożądane systemu tolerującego uszkodzenia pojawiają się w losowych chwilach. Przyjmujemy założenie, że są one opisane ciągiem nieuporządkowanych i niezależnych zmiennych losowych $T_1, \dots, T_n$ o tym samym rozkładzie określonym przez jedną z funkcji, tj. dystrybuantę zwaną również funkcją zawodności $F(t)$, funkcję niezawodności $R(t) = 1 - F(t)$ lub gęstość prawdopodobieństwa $f(t)$. Uporządkowany w sposób niemalejący ciąg zmiennych losowych $T_{1:n} \leq \dots \leq T_{n:n}$ określających chwile uszkodzeń elementów systemu lub chwile pojawień się zdarzeń niepożądanych tworzy statystyki porządkowe. Ze względu na występującą relację uporządkowania statystyki porządkowe nie mają już rozkładu niezależnego.

Statystyki porządkowe mają zastosowanie m.in. w badaniu wytrzymałości materiałów i w kontroli jakości wyrobów. Celem wprowadzenia statystyk porządkowych w tej pracy jest zastosowanie ich lub ich funkcji do wyznaczania niezawodnościowych charakterystyk funkcyjnych i liczbowych systemów o strukturach progowych typu „ k -out-of- n ”.

3. Zastosowanie rozkładu dwumianowego w problemach niezawodnościowych systemu tolerującego uszkodzenia

W tej części pracy zastosujemy statystykę porządkową $T_{k:n}$ do konstrukcji funkcyjnych i liczbowych charakterystyk niezawodnościowych dla klasy systemów o progowej strukturze „ k -out-of- n ”. Pokażemy, że jeżeli zdarzenia niepożądane (np. uszkodzenia elementów) pojawiają się niezależnie i zgodnie z tą samą funkcją zawodności F , to prawdopodobieństwo utraty zdatności (uszkodzenia) systemu o strukturze „ k -out-of- n ” można wyznaczyć z rozkładu dwumianowego.

Niech $N(t)$ będzie liczbą uszkodzonych elementów lub zdarzeń niepożądanych w czasie $(0, t]$ użytkowania obiektu. Losowa liczba $N(t)$ ma rozkład dwumianowy z parametrami n i $F(t)$, co jest symbolicznie oznaczane $N(t) \sim \text{bin}(n, F(t))$.

Funkcja prawdopodobieństwa utraty zdatności obiektu o strukturze „ k -out-of- n ” dla $k = 0, 1, \dots, n$ jest określona formułą:

$$\Pr(N(t) = k) = \binom{n}{k} (F(t))^k (R(t))^{n-k} \quad (1)$$

gdzie: $\Pr$ oznacza prawdopodobieństwo, F funkcję zawodności, R funkcję niezawodności elementu.

Ponadto funkcję zawodności $F_{k:n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Pr(T_{k:n} \leq t)$, funkcję niezawodności $R_{k:n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Pr(T_{k:n} > t)$, gęstość prawdopodobieństwa $f_{k:n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF_{k:n}(t)}{dt}$ oraz intensywność uszkodzeń $\lambda_{k:n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{k:n}(t)}{R_{k:n}(t)}$ można wyznaczyć ze wzorów (2), (3), (4), (5) z użyciem rozkładu dwumianowego,

$$F_{k:n}(t) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} (F(t))^i (R(t))^{n-i} \quad (2)$$

$$R_{k:n}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (F(t))^i (R(t))^{n-i} \quad (3)$$

$$f_{k:n}(t) = n \binom{n-1}{k-1} (F(t))^{k-1} (R(t))^{n-k} f(t) \quad (4)$$

$$\lambda_{k:n}(t) = \frac{n \binom{n-1}{k-1} (F(t))^{k-1} (R(t))^{n-k} f(t)}{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (F(t))^i (R(t))^{n-i}} \quad (5)$$

gdzie: n jest liczbą elementów systemu lub łączną liczbą zdarzeń w rozpatrywanym czasie, $k = 1, 2, \dots, n$ jest minimalną liczbą elementów lub zdarzeń niepożądanych, które spowodują utratę zdatności systemu.

W przypadku ekstremalnym dla $k = 1$ funkcje (2), (3), (4) i (5) dotyczą obiektu o strukturze szeregowej. W drugim przypadku ekstremalnym dla $k = n$ otrzymujemy funkcje dla obiektów o strukturze równoległej. Szeregowie i równoległe struktury są często nieadekwatne do modelowania rzeczywistych obiektów. Uogólnieniem struktur, które jako skrajne przypadki obejmują systemy o strukturze szeregowej lub równoległej są właśnie systemy „ k -out-of- n ”.

Przykład.

Rozważamy hydrauliczny system sześciu pomp z których co najmniej cztery muszą funkcjonować poprawnie, aby system zaopatrzenia w wodę działał poprawnie. Każda z pomp ma stałą intensywność uszkodzeń postaci $\lambda(t) = 0,0001625[1/h]$. Interesuje nas problem wyznaczenia niezawodności hydraulicznego systemu w czasie jego użytkowania przez 1000[h].

Rozwiązanie.

Z wymagań stawianych hydraulicznemu systemowi pomp wynika, że jego struktura jest typu „4-out-of-6:G” i jest równoważna strukturze „3-out-of-6:F”. Prawdopodobieństwo poprawnego działania hydraulicznego systemu jest obliczane ze wzoru (3) dla $t = 100$, $k = 3$ and $n = 6$.

Oczywiście najpierw obliczamy niezawodność jednej pompy i otrzymujemy $R(1000) \approx 0,85$, następnie wyznaczamy niezawodność systemu pomp

$$R_{3:6}(1000) = \sum_{i=0}^2 \binom{6}{i} (F(1000))^i (R(1000))^{6-i} \\ \approx 0,85^6 + 6 \cdot 0,15 \cdot 0,85^5 + 15 \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^4 \approx 0,9526614.$$

4. Zastosowanie funkcji beta do systemów tolerujących uszkodzenia

Ze związku pomiędzy sumami dwumianowymi i niepełną funkcją beta

$$I_x(k, n - k + 1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i} \quad (6)$$

gdzie: k, n są dodatnimi liczbami całkowitymi oraz $0 \leq x \leq 1$ definiujemy regulowaną funkcję beta I_x dla $x = F(t)$:

$$I_{F(t)}(k, n - k + 1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{B(k, n - k + 1)} \int_0^{F(t)} u^{k-1} (1 - u)^{n-k} du \quad (7)$$

gdzie: $B(k, n - k + 1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 t^{k-1} (1 - t)^{n-k} dt$ dla $k > 0$ i $n - k + 1 > 0$ jest funkcją beta. Bezpośrednio z zależności (2) oraz równania

$$I_x(k, n - k + 1) = 1 - I_{1-x}(n - k + 1, k) \quad (8)$$

otrzymujemy równości użyteczne w symbolicznych obliczeniach zawodności lub niezawodności systemu o strukturze progowej „ k -out-of- n ”

$$F_{k:n}(t) = I_{F(t)}(k, n - k + 1) \quad (9)$$

$$R_{k:n}(t) = 1 - I_{F(t)}(k, n - k + 1) = I_{R(t)}(n - k + 1, k) \quad (10)$$

Regulowana funkcja beta jest zaimplementowana w Wolfram Language jako `BetaRegularized[z, a, b]` (zob. [10]). Implementacja ta dla niezawodności oraz dla zawodności systemów „ k -out-of- n ”, tj. dla $T_{k:n}$ przyjmuje postać:

$$F_{k:n}(t) \stackrel{\text{Wolfram Language}}{=} \text{BetaRegularized}[F(t); k, n - k + 1] \quad (11)$$

$$R_{k:n}(t) \stackrel{\text{Wolfram Language}}{=} \text{BetaRegularized}[R(t); n - k + 1, k] \quad (12)$$

Jeżeli $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$, to dla $k = 1, \dots, n$ otrzymujemy

$$R_{k:n}(t) = 1 - I_{1-\exp(-\lambda t)}(k, n - k + 1) = I_{\exp(-\lambda t)}(n - k + 1, k) \quad (13)$$

Nawiązując do danych systemu pomp uzyskujemy dla $t \geq 0$

$$R_{3:6}(t) = I_{\exp(-\lambda t)}(4, 3) = 15e^{-4\lambda t} \left(\frac{2}{3}e^{-2\lambda t} - \frac{8}{5}e^{-\lambda t} + 1 \right) \quad (14)$$

i dla $t = 1000$, $R_{3:6}(1000) \approx 0,9526747$. Wcześniej w przykładzie otrzymaliśmy $R_{3:6}(1000) \approx 0,952661$. Różnica obliczeń wynika z przyjętego wcześniej mocniejszego zaokrąglenia wartości funkcji niezawodności.

Czteroargumentowa wersja funkcji `BetaRegularized[z1, z2, a, b]` zapisanej w języku Wolfram jest równoważna różnicy $I(z_2; a, b) - I(z_1; a, b)$. Funkcję tę można użyć do obliczenia prawdopodobieństwa uszkodzenia się systemu o strukturze „ k -out-of- n ” w okresie użytkowania $(t_1, t_2]$, gdyż

$$\Pr(t_1 < T_{(k)} \leq t_2) \stackrel{\text{Wolfram}}{=} \text{BetaRegularized}[F(t_1), F(t_2), k, n - k + 1] \quad (15)$$

lub równoważnie

$$\Pr(t_1 < T_{(k)} \leq t_2) \stackrel{\text{Wolfram}}{=} \text{BetaRegularized}[R(t_2), R(t_1), n - k + 1, k] \quad (16)$$

Wyniki obliczeń prawdopodobieństwa, że rozważany w przykładzie system „ k -out-of-6” uszkodzi się w okresach użytkowania $(0, 2000]$, $(2000, 3000]$, $(3000, \infty)$ [godz.] są zestawione w tabeli 2. Wyniki dotyczące systemu pomp, tj. systemu o strukturze „3-out-of-6” są wytłuszczone.

Tabela 2. Prawdopodobieństwa uszkodzeń systemu „ k -out-of-6”

System	Okres użytkowania w godzinach		
	$[0, 2000]$	$(2000, 3000]$	$(3000, \infty)$
1-out-of-6	0,857726...	0,088609...	0,053665...
2-out-of-6	0,529900...	0,214149...	0,255951...
3-out-of-6	0,215163...	0,211176 ...	0,573661...
4-out-of-6	0,054004...	0,106203...	0,839793...
5-out-of-6	0,007587...	0,027224...	0,965189...
6-out-of-6	0,000456...	0,002843...	0,996701...

Gęstość prawdopodobieństwa $f_{k:n}$ statystyki $T_{k:n}$, tj. czasu zdatności systemu o strukturze „ k -out-of- n ” jest wyznaczana poprzez zróżniczkowanie regulowanej funkcji beta $I_{F(x)}$

$$f_{k:n}(t) = \frac{d}{dt} \left(I_{F(t)}(k, n - k + 1) \right) \quad (17)$$

Stosując formułę (17) została wyznaczona gęstość prawdopodobieństwa $f_{3:6}$ statystyki pozycyjnej $T_{3:6}$ dla $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, tj. dla danych z przykładu,

$$f_{3:6}(t) = \frac{d}{dt} \left(I_{1-e^{-\lambda t}}(3, 4) \right) = 60\lambda e^{-6\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^2 \quad (18)$$

Ogólnie, jeżeli $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$, to dla $t \geq 0$ i $k = 1, 2, \dots, n$

$$f_{k:n}(t) = \frac{\lambda(1-e^{-\lambda t})^{k-1}(e^{-\lambda t})^{n-k+1}}{B(k, n-k+1)} = \lambda n \binom{n-1}{k-1} (1-e^{-\lambda t})^{k-1} (e^{-\lambda t})^{n-k+1} \quad (19)$$

Gęstość prawdopodobieństwa i funkcję niezawodności stosujemy do wyznaczenia funkcji intensywności uszkodzeń $\lambda_{3:6}(t)$ statystyki porządkowej $T_{3:6}$:

$$\lambda_{3:6}(t) = \frac{\frac{dI_{1-e^{-\lambda t}}(3,4)}{dt}}{I_{e^{-\lambda t}}(4,3)} = \frac{60\lambda e^{-6\lambda t}(e^{\lambda t}-1)^2}{15e^{-4\lambda t}\left(\frac{2}{3}e^{-2\lambda t}-\frac{8}{5}e^{-\lambda t}+1\right)} = \frac{4\lambda e^{-2\lambda t}(e^{\lambda t}-1)^2}{\frac{2}{3}e^{-2\lambda t}-\frac{8}{5}e^{-\lambda t}+1} \quad (20)$$

i dla $\lambda = 0,0001625$

$$\lambda_{3:6}(t) = \frac{0,00065e^{-0,000325t}(e^{0,0001625t}-1)^2}{\frac{2}{3}e^{-0,000325t}-\frac{8}{5}e^{-0,0001625t}+1} \quad (21)$$

5. Zastosowanie funkcji kwantylowej do wyznaczania czasu użytkowania systemu tolerującego uszkodzenia

Alternatywną funkcją do powszechnie stosowanych w teorii i praktyce inżynierskiej funkcji zawodności, gęstości prawdopodobieństwa, niezawodności, intensywności uszkodzeń jest rzadziej stosowana w praktyce tzw. „funkcja kwantylowa”. Funkcjom kwantylowym poświęcona jest monografia [7]. Przystosujemy tę funkcję na potrzeby badań niezawodnościowych systemów nadmiarowych.

Dla danej funkcji zawodności F lub niezawodności R funkcja kwantylowa Q jest zdefiniowana dla $0 < p < 1$ w następujący sposób:

$$Q(p) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{t \in \mathbb{R}: F(t) \geq p\} \quad (22)$$

lub równoważnie

$$Q(p) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{t \in \mathbb{R}: R(t) \leq 1 - p\} \quad (23)$$

gdzie $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych.

Wartości funkcji Q zwane są kwantylami. Dla danego $p \in (0, 1)$ zwanego rzędem kwantyla wartość $Q(p)$ podaje czas t użytkowania obiektu technicznego, w którym zawodność obiektu wzrośnie do wartości p lub niezawodność spadnie do wartości $1 - p$. Jeżeli funkcja zawodności F jest absolutnie ciągła, to funkcję infimum można zastąpić funkcją minimum i $Q = F^{-1}$, tj. funkcja kwantylowa jest równa funkcji odwrotnej do funkcji zawodności.

Funkcja kwantylowa $I_p^{-1}(k, n+1-k)$ jest funkcją odwrotną do regulowanej funkcji beta $I_{F(t)}(k, n-k+1)$ i jest zaimplementowana w Wolfram Language jako `InverseBetaRegularized`[$p, k, n+1-k$].

Dla danej funkcji zawodności F lub funkcji niezawodności R implementację tą można zastosować do wyznaczenia kwantyli systemów “ k -out-of- n ”, tj. dla $T_{(k)}$ rozwiązując jedno z równań:

$$\text{InverseBetaRegularized}[p; k, n-k+1] = F(t) \quad (24)$$

$$\text{InverseBetaRegularized}[1-p; n-k+1, k] = R(t) \quad (25)$$

Rozwiązanie równania $I_p^{-1}(k, n+1-k) = F(t)$ ze względu na czas t dla danej funkcji zawodności F i prawdopodobieństwa $p \in (0, 1)$, tj. rzędu kwantyla oraz $n \geq 2$ i $k = 1, \dots, n$ jako zagadnienie odwrotne jest analogiczne jak rozwiązanie równania $I_{F(t)}(k, n-k+1) = p$. Alternatywnie rozwiązanie ze względu na czas t równania $I_{1-p}^{-1}(n+1-k, k) = R(t)$ jest analogiczne do rozwiązania równania $I_{R(t)}(n-k+1, k) = 1-p$. W każdym przypadku rozwiązaniem jest funkcja kwantylowa $Q_{k:n}(p) = F_{k:n}^{-1}(p)$, której wartość dla danej funkcji F zawodności elementów systemu o strukturze “ k -out-of- n ” oraz dla danego p określa czas użytkowania tego systemu w ciągu którego zawodność wzrośnie do poziomu p .

W nawiązaniu do systemu z przykładu dotyczącego pomp wyznaczona jest funkcja kwantylowa $t_p = F_{k:n}^{-1}(p)$ dla wykładniczego czasu zdatności elementów, tj. dla $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$ i dla parametrów λ, k, n :

$$t_p(\lambda, k, n) = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{1}{1 - I_p^{-1}(k, n+1-k)} \right) = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{1}{I_{1-p}^{-1}(n+1-k, k)} \right) \quad (26)$$

gdzie I_p^{-1} jest „odwrotną regulowaną funkcją beta”.

Na zakończenie tej pracy funkcja (26) oraz jej alternatywne odpowiedniki zostały zastosowane do wyznaczenia kwantyli rzędu 0,95; 0,5 i 0,05 dla systemów “ k -out-of-6” oraz $k = 1, \dots, n$ i stałej intensywności uszkodzeń pomp podanej wcześniej w przykładzie, tj. dla $\lambda(t) = 0,0001625[1/h]$. Wyniki obliczeń zestawione są w tabeli 3.

Tabela 3. Kwantyle trzech rzędów systemu „ k -out-of-6”

System	Czas użytkowania w godzinach		
	$p = 0,05$	$p = 0,5$	$p = 0,95$
1-out-of-6	52,609	710,92	3072,55
2-out-of-6	399,467	1890,07	5364,95
3-out-of-6	1023,05	3367,12	8027,01
4-out-of-6	1947,97	5317,88	11546,2
5-out-of-6	3333,06	8185,25	17027,7
6-out-of-6	5746,77	13633,7	29330,6

Pochodna funkcji kwantylowej, tj. funkcja gęstości kwantylowej może być kolejnym sposobem funkcyjnego przedstawiania rozkładu czasu zdatności obiektu technicznego o nadmiarowej strukturze typu „ k -out-of- n ”. Problem ten pozostawiony jest jako otwarty.

6. Podsumowanie

W pracy przedstawiono oryginalne i nowoczesne metody badań niezawodnościowych obiektów technicznych, których modelem jest system nadmiarowy o strukturze typu „ k -out-of- n ” lub też tracący zdatność w wyniku zajścia k zdarzeń niepożądanych spośród n . Kluczem do rozwijania przedstawionych metod były statystyki porządkowe i ich rozkłady prawdopodobieństwa. Do wyznaczania charakterystyk niezawodnościowych systemów zastosowano uregulowaną funkcję beta indeksowaną zawodnością albo niezawodnością pojawienia się zdarzenia niepożądanego. Wskazane zostały funkcje w języku Wolfram do komputerowego wspomagania obliczeń symbolicznych i numerycznych, co zostało zobrazowane obliczeniami dla przykładowego systemu. Pokazana też została możliwość zastosowania funkcji kwantylowej do wyznaczania czasu użytkowania systemu nadmiarowego do utrzymania założonego poziomu niezawodności systemu. Przedstawione w pracy metody obliczeniowe nie wyczerpują dalszych możliwości ich rozwijania na potrzeby badań niezawodnościowych obiektów technicznych.

Podziękowanie

Badania były prowadzone w ramach Działalności Statutowej nr 04/43/DS PB/0085.

7. Literatura

- [1] Ahsanullah M., Nevzorov V. B. Order Statistics: Examples and Exercises. Nova Science Publishers, 2005.
- [2] Andrzejczak K.: Charakterystyki niezawodnościowe złożonych systemów odnawialnych. Materiały Szkoły Niezawodności – Metody utrzymania gotowości systemów. PAN, Szczyrk 2008, 16-28.
- [3] Andrzejczak K.: Metody prognozowania w modelowaniu eksploatacji środków transportu. Rozprawy nr 496. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2013.
- [4] Balakrishnan N, Rao C.R. Order Statistics: Theory & Methods. Vol. 16. Handbook of Statistics. North-Holland; Amsterdam: 1998. Order statistics: an introduction; pp. 3–24.
- [5] Castillo E., Hadi A.S., Balakrishnan N., Sarabia J.M. Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering and Science, John Wiley and Sons, New York, 2005.
- [6] David H.A., Nagaraja H.N. Order Statistics. Third Edition. John Wiley, New York, 2003.

-
- [7] Gilchrist, W. Statistical Modelling with Quantile Functions. CRC Press, 2000.
 - [8] Grabski F., Jaźwiński J. Funkcje o losowych argumentach w zagadnieniach niezawodności, bezpieczeństwa i logistyki. WKŁ, Warszawa 2008.
 - [9] Kuo W., Zuo M.J. Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications. New York: John Wiley & Sons, 2003.
 - [10] <https://reference.wolfram.com/language/> Wolfram Language Documentation (dostęp 2015-10-13).

Dr hab. Karol Andrzejczak graduated in Mathematics in 1980 at Adam Mickiewicz University, Poznań. Since then he has been working at the Institute of Mathematics at Poznań University of Technology (PUT). He received the PhD degree in Mathematical Sciences in 1987 and D.Sc. degree in Technical Sciences in 2014 from PUT. His scientific interests concern statistical methods and probabilistic modelling of technical systems – particularly availability, maintenance, safety and risk analysis of transportation means and systems. He is a member of the Polish Statistical Association, the Polish Society for Measurement, the Automatic Control and Robotics and the American Mathematical Society.