RELIABILITY ANALYSIS OF HELICOPTER'S SUPPORTING STRUCTURE WITH SSI AND SST MODELS USED

ANALIZA NIEZAWODNOŚCIOWA STRUKTURY NOŚNEJ ŚMIGŁOWCA MODELAMI SSI ORAZ SST

Tomasz Bońkowski, Marta Woch

Politechnika Warszawska, Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych

e-mail: marta.woch@itwl.pl

Abstract: *In this work, algorithms have been used to compare the methods for determining reliability of critical points. Generalized models Stress-Strength-Interference (SSI) and Stress-Strength-Time (SST) have been analyzed. Input to the algorithms, stress and strength were generated by using the Markov chain model based on actual flight records. With this approach methods of determining the reliability of critical points of a helicopter's structure are justified.*

Keywords: *reliability, safety, stress-strength-interference, stress-strength-time*

Streszczenie: *W pracy dokonano próby porównania algorytmów metod wyznaczania niezawodności punktów krytycznych. Poddano analizie modele Stress-Strength-Interference (SSI) oraz Stress-Strength-Time (SST), której celem było sprawdzenie zastosowań obydwu metod w rzeczywistych warunkach eksploatacji dla punktów krytycznych struktury nośnej śmigłowca. Dane wejściowe do algorytmów, czyli naprężenia w punkcie krytycznym struktury nośnej śmigłowca zostały wygenerowane przy użyciu łańcuchów Markowa bazujących na rzeczywistych zapisach z lotu. Dzięki takiemu podejściu metody wyznaczania niezawodności punktów krytycznych struktury helikoptera mają rzeczywiste podstawy.*

Słowa kluczowe: *niezawodność, bezpieczeństwo, stress-strength-interference, stress-strength-time*

1. Model Stress-Strength-Interference (SSI)

Analiza ryzyka uszkodzenia struktury śmigłowca wykorzystuje probabilistyczne modele matematyczne. Zakłada ona, iż parametry charakteryzujące się niepewnością, bądź zmiennością są reprezentowane przez n-wymiarową zmienną losową zwaną wektorem losowym:

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \quad (1)$$

gdzie $X_1, X_2, \dots, X_n$ są jednowymiarowymi zmiennymi losowymi.

Uogólniona funkcja graniczna $g(\mathbf{X})$ określona na wektorze losowym definiuje stany graniczne. Zakłada się, iż uszkodzenie struktury śmigłowca następuje, gdy $g(\mathbf{X}) \leq 0$. Jeżeli $g(\mathbf{X}) = 0$ struktura jest w stanie granicznym. Funkcja graniczna pozwala zdefiniować dwa obszary w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω :

– obszar bezpieczny:

$$\Omega_s = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) > 0\} \quad (2)$$

– oraz obszar awarii:

$$\Omega_f = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (3)$$

Prawdopodobieństwo awarii zdefiniowane jest następująco:

$$P_f = P(\Omega_f) = P(g(\mathbf{x}) \leq 0) = 1 - R \quad (4)$$

gdzie R jest niezawodnością.

Powierzchnia graniczna określona jest równaniem:

$$g(\mathbf{x}) = 0 \quad (5)$$

W analizie niezawodności krytycznych punktów śmigłowca często rozpatrywany jest przypadek, w którym funkcja graniczna $g(\mathbf{x})$ zdefiniowana jest w następujący sposób [1]:

$$g(\mathbf{x}) = X_W - X_N \quad (6)$$

gdzie X_W jest zmienną losową opisującą wytrzymałość danego punktu krytycznego, a X_N opisuje naprężenia.

Tak zdefiniowana funkcja graniczna odpowiada podstawowemu założeniu modelu SSI, które bazuje na stwierdzeniu, iż dowolny element śmigłowca ulega uszkodzeniu wtedy, gdy wartość naprężenia X_N występującego w tym elemencie jest większa niż wytrzymałość X_W tego elementu.

Dla tak zdefiniowanej funkcji granicznej prawdopodobieństwo uszkodzenia wyliczyć można za pomocą:

$$P_f = P(X_W < X_N) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_W(x_W) \int_{x_W}^{+\infty} f_N(x_N) dx_N dx_W \quad (7)$$

gdzie $f_N(x_N)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa naprężenia, a $f_W(x_W)$ opisuje gęstość prawdopodobieństwa wytrzymałości.

Podstawowy model SSI zakłada normalny rozkład zmiennych losowych. W uogólnionym modelu (GSSI) rozkład brzegowy $f_N(x_N)$ i $f_W(x_W)$ może być opisany dowolną funkcją. Niezawodność w takim modelu można wyznaczyć za pomocą [1]:

$$R = P(X_W \geq X_N) = \int_0^{2x_W} F_W(x_W) f_N(x_N) dx_N = \int_0^{2x_W} F_N(x_N) f_W(x_W) dx_W \quad (8)$$

gdzie $F_N = \int_0^{x_N} f_N(x_N) dx_N$ jest dystrybucją zmiennej X_N , analogicznie

$F_W = \int_0^{x_W} f_W(x_W) dx_W$ jest dystrybucją zmiennej X_W .

Model SSI opisuje prawdopodobieństwo uszkodzenia struktury nośnej śmigłowca kiedy następuje jednokrotny wzrost wartości naprężenia.

Rys. 1. Graficzna interpretacja prawdopodobieństwa uszkodzenia

2. Model Stress-Strength-Time (SST)

Model SST zakłada, iż wartości sił oraz naprężeń w punktach krytycznych są pewnymi ciągłymi funkcjami czasu, tak jak jest to obserwowalne w rzeczywistości. Zauważono, iż przy obliczeniach niezawodnościowych funkcje te mogą być przedstawione w postaci analitycznej, albo opisane za pomocą rozkładów zmiennych losowych. Wprowadzono podział modelu SST na trzy ogólne warianty [1]:

- 1) Model deterministyczny zakłada, iż wytrzymałość oraz napężenie są dokładnie zdefiniowane, albo zmieniają się w sposób znany i przewidywalny, możliwy do opisanego za pomocą funkcji matematycznych.
- 2) Model quasi - probabilistyczny (Random - Fixed) zakłada, iż wytrzymałość oraz napężenie zmieniają się w sposób znany i przewidywalny w czasie, ale nie są znane wartości stałych parametryzujących opis równania.
- 3) Model probabilistyczny (Random-Independent) zakłada, iż zarówno napężenie jak i wytrzymałość są zmiennymi losowymi o wartościach statystycznie niezależnych.

W normalnych warunkach eksploatacji śmigłowców mamy do czynienia z przypadkiem SST (2,3) gdzie napężenia są opisane losowymi wartościami x_N , statystycznie niezależnymi o takim samym rozkładzie prawdopodobieństwa $f_N(x_N)$. Wytrzymałość jest quasi – probabilistyczną zmienną o znanym rozkładzie $f_W(x_W)$. Dla tak zdefiniowanego modelu niezawodność R_n konstrukcji po n -tym cyklu działania obciążenia może być wyznaczona za pomocą:

$$R_n = P(E_1) \times P(E_2) \times \dots \times P(E_n) = \left(\int_0^\infty f_W(x_W) \left\{ \int_0^{x_N} f_N(x_N) dx_N \right\} dx_W \right)^n \quad (9)$$

Model ten zakłada, iż czas nie jest zmienną losową, a długość cyklu jest znana, jednakowa dla każdego obciążenia. Podstawowy model SST zakłada normalny rozkład zmiennych losowych. W uogólnionym modelu (GSST) rozkład brzegowy $f_N(x_N)$ i $f_W(x_W)$ może być dowolnie zdefiniowany. Niezawodność w takim modelu można wyznaczyć za pomocą:

$$R_n = \left[\int_0^{2x_W} F_W(x_W) f_N(x_W) dx_W \right]^n = \left[\int_0^{2x_W} F_N(x_W) f_W(x_W) dx_W \right]^n \quad (10)$$

5. Modele Markov'a

W nawiązaniu do [2] łańcuch Markov'a pierwszego rzędu (FCM) wraz ze zdefiniowaną skończoną podprzestrzenią E jest sekwencją losowych wartości z tej podprzestrzeni $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Warunkowy rozkład wartości X_{n+1} uzyskanych na podstawie znajomości wartości $(X_m)_{m \leq n}$ jest tożsamy z rozkładem X_{n+1} gdy znana jest tylko wartość X_n :

$$P(X_{n+1} = e_{n+1} | (X_n = e_n, X_{n-1} = e_{n-1}, \dots, X_1 = e_1)) = P(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = e_n) \quad (11)$$

Jeśli K jest liczbą zdefiniowanych klas można zdefiniować macierz $\mathbf{P}(K \times K)$ prawdopodobieństwa przejścia z klasy i do klasy j :

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,K} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{K,1} & p_{K,2} & \dots & p_{K,K} \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^K p_{i,j} = 1, \quad 0 \leq p_{i,j} \leq 1 \quad (12)$$

gdzie $i = 1, \dots, K$, $p_{i,j} = P(X_{n+1} = e_j | X_n = e_i)$.

W celu wygenerowania następnej wartości z łańcucha Markov'a X_{n+1} wymagana jest znajomość tylko poprzedniej wartości $X_n = e_n$. Prawdopodobieństwo iż $X_{n+1} = e_{n+1}$ wynosi $p_{n,n+1}$.

Ukryty model Markov'a (HMM) [3, 4] bazuje na koncepcji z łańcuchów Markov'a oraz obserwacji iż wartość X nie jest tylko dyskretnym stanem zależnym od E , ale jest funkcją prawdopodobieństwa tego stanu. Łańcuch jest zdefiniowany jako dwuwymiarowy, dyskretny w czasie proces $\{S_n, X_n\}_{n \geq 0}$. W celu wygenerowania kolejnej wartości X_{n+1} należy wybrać funkcję S_k bazując na znanej poprzedniej wartości X_n . Wartość e_{n+1} jest generowana na podstawie funkcji S_k .

6. Funkcja prawdopodobieństwa wytrzymałości

W celu wyznaczenia rozkładu prawdopodobieństwa wytrzymałości testowano próbki ze stali 30HGSNA o średnicy 5-8 mm. Poprzez wytrzymałość elementu rozumiane jest przekroczenie granicy sprężystości. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 1 [5]:

Tabela 1 Granica plastyczności dla badanych stalowych próbek

Nr. próbki	2/05/2	2/05/3	2/05/4	2/05/5	2/05/36	2/05/61	2/05/62	2/05/64	2/05/132
R _{0.05} [MPa]	1160	1145	1150	1200	1230	1230	1240	1175	1175
Nr. próbki	2/05/133	2/05/134	2/05/135	2/05/136	2/05/137	2/05/138	2/05/139	2/05/140	2/05/141
R _{0.05} [MPa]	1235	1280	1290	1330	1220	1225	1235	1240	1250

Na podstawie wyników zaproponowano funkcję rozkładu wytrzymałości opisaną za pomocą rozkładu normalnego $g(y)$ o wartości oczekiwanej wynoszącej $\mu = 1219$ and i wariancji równej $\sigma^2 = 110^2$.

$$f_w(x_w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}110^2} \exp\left(-\frac{(x-1219)^2}{2 \cdot 110^2}\right) \quad (13)$$

7. Funkcja prawdopodobieństwa naprężenia

Krytyczny element struktury śmigłowca Mi-24, przedstawiony na rys. 2 został zeskanowany przy użyciu skanera 3D ATOS III (Advanced Topometric System) [6]. Bazując na uzyskanym modelu zaprojektowano kształt w programie Unigraphics. Obliczenia wykonano przy pomocy programu MSC Marc. Analizę przeprowadzono z założeniem liniowej zależności pomiędzy naprężeniem i odkształceniem materiału. Rozkład i wartości naprężeń zredukowanych według

hipotezy Hubera i naprężeń maksymalnych głównych w węzłach mocowania poszczególnych elementów przy obciążeniu siłami jednostkowymi. Maksymalna wartość maksymalnego naprężenia głównego wyniosła 2880 Pa przy obciążeniu siłami jednostkowymi.

Rys. 2. Rozkład naprężeń zredukowanych w elemencie krytycznym

Na podstawie obliczeń rozkład naprężeń został wygenerowany dla danego elementu krytycznego.

Funkcja rozkładu naprężeń w punkcie krytycznym może być opisana za pomocą rozkładu normalnego f_{N1} o wartości oczekiwanej wynoszącej $\mu = 70$ and i wariancji równej $\sigma^2 = 25^2$.

$$f_{N1}(x_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}25^2} \exp\left(-\frac{(x-70)^2}{2 \cdot 25^2}\right) \quad (14)$$

Na podstawie histogramu naprężeń, dane podzielono na osiem klas c_k . W modelu wygenerowanym z łańcucha Markowa, cykle naprężeń należące do klasy c_i zostały zastąpione przez odpowiadające im wartości s_i pokazane w tabeli 2:

Tabela 2 Dyskretny rozkład prawdopodobieństwa naprężenia f_{N2} z łańcucha Markov'a

s_i	15	30	45	60	75	95	140	180
p_i	0,0034	0,0629	0,0698	0,2699	0,1733	0,3094	0,1084	0,0025

W przypadku wykorzystania do obliczeń ukrytego modelu Markov'a, skończoną podprzestrzeń E podzielono na 5 części. Dystrybucja rozkładu naprężeń dla tego modelu może być opisana funkcją f_{N3} (4):

$$f_{N3}(x_3) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ \frac{0,03}{\sqrt{2\pi}1,5^2} \exp\left(-\frac{(x-17)^2}{2 \cdot 1,5^2}\right) & 10 \leq x < 20 \\ \frac{0,03}{\sqrt{2\pi}1,5^2} \exp\left(-\frac{(x-24)^2}{2 \cdot 1,5^2}\right) & 20 \leq x < 30 \\ \frac{0,38}{\sqrt{2\pi}3,6^2} \exp\left(-\frac{(x-53)^2}{2 \cdot 3,6^2}\right) & 30 \leq x < 60 \\ \frac{0,6}{\sqrt{2\pi}12^2} \exp\left(-\frac{(x-80)^2}{2 \cdot 12^2}\right) & x \geq 60 \end{cases} \quad (15)$$

Rys. 3. Histogram naprężeń i jego aproksymacja funkcjami: f_{N1} , f_{N2} , f_{N3}

8. Wyniki

Prawdopodobieństwo uszkodzenia punktu krytycznego struktury nośnej śmigłowca w modelu SSI wynosi $2,16 \cdot 10^{-8}$. Dla uogólnionego modelu Generalized Stress-Strength-Interference (GSSI) wyniki zależą od estymacji rozkładu naprężeń. Dla danych uzyskanych z modelu Markov'a prawdopodobieństwo uszkodzeń wyniosło: $9,19 \cdot 10^{-9}$ oraz $5,38 \cdot 10^{-9}$ dla łańcucha Markov'a FCM (f_{N2}) oraz dla ukrytego modelu Markov'a HMM (f_{N3}).

Analiza modelu SST wykazała, iż prawdopodobieństwo uszkodzenia rzędu 1% będzie osiągnięte po 465 000 cyklach w przypadku, gdy naprężenia mają rozkład normalny (f_{N1}). Dla uogólnionego modelu SST uzyskano następującą liczbę cykli: 1 290 000 dla łańcucha Markov'a FCM (f_{N2}) oraz 1 090 000 dla ukrytego modelu Markov'a HMM (f_{N3}).

9. Wnioski

Model SSI (Stress-Strength-Interference) pozwala na obliczenie prawdopodobieństwa uszkodzenia struktury nośnej śmigłowca w punkcie krytycznym podczas jednokrotnego wzrostu wartości naprężenia. Nie znajduje on szerokiego zastosowania w lotnictwie gdzie naprężenia zmieniają się w czasie, może służyć jedynie jako ogólne przybliżenie.

W powyższych modelach niezawodnościowych nie został uwzględniony proces starzenia się elementu. Wzięcie pod uwagę tego zdarzenia spowoduje zmniejszenie liczby cykli możliwych do uszkodzenia danego punktu krytycznego.

Wyniki uzyskane z uogólnionych modeli SSI oraz SST mają podobne wartości w zależności od sposobu uzyskania funkcji prawdopodobieństwa dla naprężenia. Występują nieznaczne różnice w porównaniu do podstawowych modeli SSI bądź SST.

10. Bibliografia

- [1] AIRO SOFTWARE: Projekt badawczy nr PBR 03/2000/z.
- [2] C. Mattrand, J-M. Bourinet, D. Theret: Analysis of Fatigue Crack Growth under Random Load Sequences Derived from Military In-flight Load Data, 26th ICAF Symposium, Montreal, 2011.
- [3] O. Cappe, E. Moulines, T. Ryden: Interference in Hidden Markov Models. Springer Series in Statistics, 2005.
- [4] L. Rabiner: A tutorial on hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition, In: Readings in Speech Recognition 2011.
- [5] Klimaszewski, S. i inni: Badania wytrzymałościowo-zmęczeniowe stali 30HGSNA. Sprawozdanie nr 35/31/2007, ITWL, Warszawa, 2007.
- [6] Wrona, M. i inni: Wykonanie analizy trwałości zmęczeniowej dla głównych elementów siłowych konstrukcji kadłuba śmigłowca Mi-24, Sprawozdanie nr 114/31/2009, ITWL, Warszawa, 2009.

mgr inż. Marta Woch

Tomasz Bońkowski