INTRODUCTION TO PREDICTION OF OPERATIONAL EFFICIENCY FOR A SELECTED TYPE OF A MILITARY AIRCRAFT

WPROWADZENIE DO PROGNOZY SKUTECZNOŚCI DZIAŁANIA WYBRANEGO TYPU WOJSKOWEGO STATKU POWIETRZNEGO

Tomaszek Henryk, Kaleta Ryszard, Zieja Mariusz

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych

e-mail: ryszard.kaleta@itwl.pl; mariusz.zieja@itwl.pl

Abstract: The study reveals the general outline for a method of determining the operational efficiency of a military aircraft with respect to destruction of targets held by a potential enemy. The method consists in determination of selected probability factors that define the efficiency of an aircraft's operation on a potential battlefield. The paper is focused on finding a formula for the mathematical expectation for the number of enemy targets that can be eliminated, where the analytical relationships is determined by means of difference equation that is subsequently transformed into the Fokker-Planck partial differential equation. The solution of that equation represents the function of probable density for the number of destroyable targets. When the function is known it can be then used to determine the efficiency factor related to the optimum (most desired) number of enemy targets that are destroyed. For these probabilities the denominator values are equal to one or the optimum values. The efficiency factor, determined in such a way, seems to be useful for determination of the operational potential demonstrated by a military aircraft.

Keywords: reliability, availability, efficiency, military aircraft, weapon systems,

Streszczenie: W pracy przedstawiono zarys metody określenia skuteczności działania wojskowego statku powietrznego w zakresie zwalczania celów potencjalnego przeciwnika. W artykule określono wybrane prawdopodobieństwa, które decydują o skuteczności działania wojskowego statku powietrznego. Praca obejmuje określenie zależności na wartość oczekiwaną liczby zniszczonych celów przeciwnika. Do określenia analitycznej zależności zastosowano równanie różnicowe, z którego po przekształceniu otrzymano równanie różniczkowe cząstkowe typu Fokkera-Plancka. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja gęstości liczby niszczonego celów. Wykorzystując tę zależność określono wskaźnik skuteczności odniesiony do optymalnej wartości liczby zniszczonych celów. Wartości tych prawdopodobieństw w mianowniku przyjmują wartości równe jedności lub wartości optymalne. Tak zbudowany wskaźnik skuteczności wydaje się, że może być wykorzystany do określenia potencjału użytkowego wojskowego statku powietrznego.

Słowa kluczowe: niezawodność, gotowość, skuteczność, efektywność, wojskowy statek powietrzny, system uzbrojenia.

1. Wstęp

W wielu publikacjach efektywność określona jest następująco: **„Efektywność to rezultat podjętych działań opisany relacją uzyskanych efektów do poniesionych nakładów”**.

W odniesieniu do działań wojskowych statków powietrznych można to wyrazić następującą zależnością:

$$E[z]_t = E[w]_t - E[k]_t, \quad (1)$$

gdzie:

$E[z]_t$ - wartość oczekiwana szeroko rozumianego zysku „z” w wyniku działania elementu głównego w przedziale czasu $(0, t)$. Przez element główny rozumie się statek powietrzny określonego typu oraz pilota;

$E[w]_t$ - wartość oczekiwana szeroko rozumianych wpływów „w” (wartość zniszczonych celów przeciwnika) w wyniku działania elementu głównego w przedziale czasu $(0, t)$;

$E[k]_t$ - wartość oczekiwana, szeroko rozumianych kosztów „k”, związanych z lotem elementu głównego i elementów pomocniczych odniesionych do przedziału czasu $(0, t)$.

W odniesieniu do wojskowych statków powietrznych efektywność ich działania można określić również skutecznością. W literaturze przyjęto następujące określenie: **„Działanie skuteczne to takie, które w jakimś stopniu prowadzi do skutku zamierzonego jako cel. Miarą skuteczności jest tylko stopień zbliżenia się do celu”**. W tym przypadku nie bierzemy pod uwagę kosztu.

Pod pojęciem skuteczności w lotnictwie wojskowym (statki posiadają uzbrojenie lotnicze) rozumie się prawdopodobieństwo porażenia celu przeciwnika w wyniku strzelania powietrznego lub bombardowania. Porażenie celu to spowodowanie takich jego uszkodzeń na skutek, których przestaje on normalnie funkcjonować w wyniku pełnej utraty lub obniżenie jej do określonego poziomu jego zdolności do działania.

Każdy cel (naziemny, powietrzny lub nawodny) posiada określoną wrażliwość na zniszczenie. Pod pojęciem wrażliwości rozumie się potrzebną średnią liczbę trafień określonego kalibru broni w wyniku, których cel zostanie porażony. Gdy kaliber broni jest odpowiednio duży, to do porażenia celu wystarczy jedno trafienie lub spowodowanie jego wybuchu w okolicy celu. Statek powietrzny (wojskowy), aby wykonać zadanie niszczenia celów przeciwnika musi być odpowiednio przygotowany do tego zadania na lotnisku oraz wykonanie lotu wymaga pełnego rozeznania i przygotowania do wykonywania zadania.

Dalej zostaną określone wybrane prawdopodobieństwa dla:

- statku powietrznego,
- systemu uzbrojenia statku.

Zarys opisu przygotowania do lotu statku i pilota przedstawiony jest w pracy [1].

2. Gotowość statku powietrznego do wykonywania zadań – K_g [2]

Gotowość statku powietrznego do wykonywania zadań wyrażona poprzez współczynnik gotowości K_g jest miarą wysiłku służb technicznych w utrzymaniu statków powietrznych w stanie zapewniającym możliwość działania. Współczynnikiem gotowości K_g nazywamy prawdopodobieństwo tego, że w chwili t statek powietrzny będzie gotowy do wykonywania zadań.

W celu zilustrowania sposobu podejścia przy wyznaczaniu tego współczynnika wykorzystajmy rys.1.

Rys.1. Schemat przywracania stanu gotowości statku powietrznego.

Przyjmijmy, że:

T''_i - zmienna losowa czasu przywracania stanu gotowości ($i = 1, 2, \dots$);

T'_i - zmienna losowa czasu przebywania w stanie gotowości ($i = 1, 2, \dots$).

Weźmy pod uwagę długi odcinek czasu, w którym na przemian występuje n okresów przebywania w stanie gotowości i n okresów przywracania stanu gotowości. Rozpatrzmy następujące wyrażenie:

$$\frac{T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n}{(T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n) + (T''_1 + T''_2 + \dots + T''_n)}.$$

Wyrażenie to równe jest udziałowi czasu, w ciągu którego statek powietrzny przebywał w stanie gotowości.

Dla $n \rightarrow \infty$ ułamki:

$$\frac{T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n}{n} \quad \text{oraz} \quad \frac{T''_1 + T''_2 + \dots + T''_n}{n},$$

zgodnie z prawem wielkich liczb, z prawdopodobieństwem równym jedności są zbieżne do odpowiednich średnich Θ_1 i Θ_2 .

Stąd:

$$\frac{\frac{T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n}{n}}{\frac{T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n}{n} + \frac{T''_1 + T''_2 + \dots + T''_n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2}.$$

W ten sposób otrzymujemy zależność na współczynnik gotowości o następującej postaci:

$$K_g = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2} \quad (2)$$

Z powyższego wynika, że współczynnik gotowości jest stacjonarną gotowością obiektu technicznego znajdującego się w dwóch stanach eksploatacyjnych, przy czym Θ_1 i Θ_2 są wartościami oczekiwanymi odpowiednio czasu przebywania w stanie zdatnym oraz czasu napraw.

3. Niezawodność statku powietrznego w czasie wykonywania zadania – R

Niezawodność statku powietrznego w czasie wykonywania zadania może być miarą zarówno jakości statku powietrznego, jak i wysiłku służb technicznych w utrzymaniu tego stanu. Określenie niezawodności statku powietrznego w czasie wykonywania zadania sprowadza się do wyznaczania prawdopodobieństwa prawidłowego działania statku w czasie lotu w przedziale $(t, t + \tau)$, gdzie τ jest średnim czasem trwania lotu w ramach wykonywanego zadania.

Założmy, że uszkodzenia w locie statku powietrznego można podzielić na dwie grupy:

- pierwszą grupę uszkodzeń stanowią uszkodzenia, które prowadzą tylko do przerwania wykonywania zadania bez straty statku;
- drugą grupę uszkodzeń stanowią uszkodzenia, które powodują utratę statku powietrznego.

Wyznaczając prawdopodobieństwo zdatnej pracy statku powietrznego w locie ograniczymy się do pierwszej grupy uszkodzeń. Drugą grupę uszkodzeń uwzględnimy przy określeniu strat w wyniku przeciwdziałania przeciwnika. Takie ustalenia pozwolą wyznaczyć niezawodność statku powietrznego w przedziale czasu $(t, t + \tau)$ za pomocą teorii odnowienia.

Rozpatrzmy schemat wykonywania przez statek powietrzny lotów bojowych jak na rys.2.

Rys.2. Schemat wykonywania lotów bojowych statku powietrznego

Niech wielkości $T_1, T_2, \dots$ reprezentują nalot statku powietrznego pomiędzy jego kolejnymi wznowieniami lotów. Załóżmy również, że $T_1, T_2, \dots$ są zmiennymi niezależnymi mającymi te same dystrybuanty, tzn.:

$$F(t) = P\{T_k < t\}; \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

a wartości oczekiwane i wariancje dla wszystkich T_k są jednakowe i wynoszą odpowiednio:

$$\Theta = E[T_k] = \int_0^{\infty} R(t)dt = \int_0^{\infty} tf(t)dt,$$

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} t^2 f(t)dt - (E[T_k])^2,$$

gdzie:

$R(t)$ - niezawodność statku powietrznego w funkcji nalotu,

$f(t)$ - funkcja gęstości uszkodzeń.

Dla przyjętych ustaleń, korzystając z teorii odnowienia można wykazać, że niezawodność statku powietrznego dla lotu trwającego τ jednostek czasu można określić następującym wzorem:

$$R(\tau) = \frac{1}{\Theta} \int_{\tau}^{\infty} (1 - F(t))dt. \quad (3)$$

W sytuacji, gdy uszkodzenia w locie podlegają wykładniczemu rozkładowi prawdopodobieństwa, zależność (3) przyjmuje postać:

$$R(\tau) = \frac{1}{\Theta} \int_{\tau}^{\infty} (1 - F(t))dt = \frac{1}{\Theta} \int_{\tau}^{\infty} [1 - (1 - e^{-\bar{\lambda}t})]dt = \frac{1}{\Theta} \left[-\frac{1}{\bar{\lambda}} e^{-\bar{\lambda}t} \right]_{\tau}^{\infty} = e^{-\bar{\lambda}\tau},$$

gdzie:

$\bar{\lambda}$ - intensywność uszkodzeń w locie.

Przyjmując, że średni czas lotu jest równy τ , prawdopodobieństwo niezawodnej pracy statku powietrznego w tym czasie będzie równe:

$$R(\tau) = e^{-\bar{\lambda}\tau} = R. \quad (4)$$

4. Zarys modelu skuteczności do oceny zastosowań bojowych wojskowych statków powietrznych [1]

Przy tworzeniu ogólnego modelu oceny efektywności zastosowania bojowego wojskowego statku powietrznego należy wziąć pod uwagę to, że do wypełnienia określonego zadania, niezbędne jest, aby jego system uzbrojenia był w stanie gotowości do wykorzystania bojowego, a realne warunki zastosowania systemu odpowiadały warunkom, w których możliwe będzie wykonanie tego zadania.

Wychodząc z tego ogólnego stwierdzenia, można zapisać następujące równanie:

$$P_{ZB} = G \cdot R_p \cdot R_s \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4, \quad (5)$$

gdzie:

- P_{ZB} - prawdopodobieństwo wykonania zadania bojowego;
- G - gotowość pilota i statku;
- R_p - niezawodność pilota;
- R_s - niezawodność statku;
- P_1 - prawdopodobieństwo, że system uzbrojenia statku powietrznego (broń) będzie w stanie gotowości do wykorzystania bojowego do wymaganej chwili czasu (momentu podjęcia decyzji odnośnie użycia uzbrojenia);
- P_2 - prawdopodobieństwo, że system uzbrojenia będzie pracował przez zadany okres czasu i zachowane będą jego charakterystyki wyjściowe w założonych granicach;
- P_3 - prawdopodobieństwo, że realne warunki wykorzystania systemu uzbrojenia, opisane przez parametry charakteryzujące orientację przestrzenną statku powietrznego względem celu (odległości, kąty i prędkości kątowe) i parametry charakteryzujące otoczenie (np. warunki propagacji promieniowania elektromagnetycznego) będą odpowiadały warunkom taktycznym wykorzystania systemu broni (określonym w wyniku badań poligonowych systemu);
- P_4 - prawdopodobieństwo skutecznego wykonania ataku w wyniku użycia systemu uzbrojenia.

Zależność (5) jest słuszna tylko w takim przypadku, kiedy $G, R_p, R_s, P_1, P_2, P_3$ i P_4 są wzajemnie niezależne i opisują łącznie prawdopodobieństwo pozytywnego wykonania zadania bojowego przez wojskowy

statek powietrzny przy jednym ataku celu (w jednym zejściu) z wykorzystaniem określonego zakresu pracy systemu uzbrojenia pokładowego i rodzaju broni.

W strukturze tego modelu występują cztery gałęzie:

- gotowości,
- niezawodności statku powietrznego i pilota,
- odpowiedniości (zgodności),
- skuteczności systemu uzbrojenia statku powietrznego.

Gałąź gotowości bojowej – w modelu reprezentowana jest przez prawdopodobieństwo P_1 , które określa, że system uzbrojenia statku powietrznego będzie w stanie zdadności do działania w chwili, kiedy zajdzie taka potrzeba. Gotowość bojowa danego systemu uzbrojenia w zasadzie zależy od jakości jego eksploatacji technicznej, a szczególnie od zabezpieczenia materiałowo-technicznego.

Gałąź niezawodności określa prawdopodobieństwo P_2 , że system uzbrojenia będzie normalnie funkcjonował w przeciągu założonego odcinka czasu (określonego czasem trwania cyklu), jeśli znajdował się w stanie zdadności do wymaganej chwili czasu (określonej podjęciem decyzji o użyciu systemu uzbrojenia). Niezawodność systemu uzbrojenia zależy będzie od czasu pracy systemu (długości założonego odcinka czasu), a także od intensywności jego uszkodzeń. Wartość tego prawdopodobieństwa P_2 powinna być obliczana dla średnich (typowych) warunków działania. Należy jednak mieć na uwadze, że może ona ulec obniżeniu przy wyjątkowo trudnych warunkach działania.

Gałąź odpowiedności – reprezentowana jest w modelu przez prawdopodobieństwo P_3 , określające naturalne warunki zewnętrzne (otoczenie) i przeciwdziałanie przeciwnika, które mają zasadniczy wpływ na funkcjonowanie urządzeń zbierających i przetwarzających informację o celu i otoczeniu. Informacja ta jest niezbędna w procesie wykrycia i identyfikacji celu, realizacji algorytmów celowniczych i sterowania statkiem powietrznym, nakierowanego na osiągnięcie przez statek powietrzny (we właściwym czasie) takiej pozycji względem celu, która umożliwia wykonanie skutecznego ataku z użyciem danego rodzaju uzbrojenia. Wszystkie czynniki określające odpowiedność przedstawiają sobą prawdopodobieństwa odpowiednich zdarzeń losowych, składających się na funkcjonowanie systemu uzbrojenia lotniczego w procesie jego użycia bojowego (w przewidywanych warunkach).

Gałąź skuteczności – reprezentuje prawdopodobieństwo P_4 . Efekt ataku (strzelania, bombardowania, odpalania rakiet itp.) w pojedynczym wylocie na zadanie bojowe jest zdarzeniem losowym, którego prawdopodobieństwo w zależności od typu zwalczanego celu (cel pojedynczy lub grupowy) będzie bezwarunkowym (całkowitym, pełnym) prawdopodobieństwem porażenia celu

$P_{por\alpha}$ lub prawdopodobieństwem porażenia $P_{por\alpha_m}$, co najmniej m liczby niszczonego celów elementarnych.

Na wykonanie skutecznego ataku składają się: celowanie, przygotowanie środków bojowych do oddzielenia, wypracowanie komendy powodującej ich oddzielenie (zrzut lub odpalenie) lub otwarcie ognia z broni lufowej, lot środka rażenia do celu oraz jego bezpośrednie oddziaływanie na cel (nakierowanie na jego porażenie).

Ogólnie proces związany z atakiem i użyciem uzbrojenia można przedstawić w postaci następujących po sobie w czasie, poniżej wymienionych zdarzeń losowych:

- wykrycie celu przez załogę statku powietrznego (wzrokowo lub z wykorzystaniem aparatury pokładowej) oraz jego identyfikacja;
- osiągnięcie przez statek powietrzny we właściwym czasie (w przewidywanej sytuacji bojowej) takiej pozycji względem celu, która umożliwia wykonanie ataku z użyciem danego rodzaju uzbrojenia, czyli osiągnięcie tzw. strefy możliwych ataków;
- celowanie;
- ostrzelenie celu (przygotowanie określonego środka bojowego do oddzielenia i oddzielenie się go od nosiciela lub otwarcie ognia z broni lufowej);
- lot środka bojowego (rażenia) do celu;
- trafienie lotniczego środka rażenia w cel lub jego okolice (amunicja z zapalnikami kontaktowymi) albo wybuch lotniczego środka rażenia w pobliżu celu (amunicja z zapalnikami niekontaktowymi);
- rażenie celu przez element (czynnik) lotniczego środka rażenia, który bezpośrednio trafił w cel, lub którego wybuch nastąpił w danym punkcie przestrzeni wokół celu.

Oznaczając prawdopodobieństwa pięciu następujących kolejno po sobie zdarzeń przez P_w, P_a, P_c, P_s i P_l oraz mając na uwadze prawdopodobieństwa porażenia celu, tj. $P_{por\alpha}$ lub $P_{por\alpha_m}$ (w zależności od typu celu) zależność opisującą gałąź skuteczności można zapisać w postaci:

$$P_4 = P_{4p} = P_w \cdot P_a \cdot P_c \cdot P_s \cdot P_l \cdot P_{por\alpha} \quad \text{dla celu pojedynczego} \quad (6)$$

lub

$$P_4 = P_{4g} = P_w \cdot P_a \cdot P_c \cdot P_s \cdot P_l \cdot P_{por\alpha_m} \quad \text{dla celu grupowego (powierzchniowego)} \quad (7)$$

Ostatecznie zależność (5) dla zadania polegającego na niszczeniu pojedynczego celu można zapisać w postaci:

$$P_{ZB} = G \cdot R_p \cdot R_s \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_w \cdot P_a \cdot P_c \cdot P_s \cdot P_l \cdot P_{poraż} \quad (8)$$

gdzie:

- P_{ZB} - prawdopodobieństwo pozytywnego wykonania zadania bojowego przez wojskowy statek powietrzny;
- P_1 - prawdopodobieństwo, że system uzbrojenia (broń) będzie w stanie gotowości do wykorzystania bojowego do wymaganej chwili czasu (momentu podjęcia decyzji odnośnie użycia uzbrojenia);
- P_2 - prawdopodobieństwo, że system uzbrojenia będzie pracował przez zadany okres czasu niezawodnie i zachowane będą jego charakterystyki wyjściowe w założonych granicach;
- P_3 - prawdopodobieństwo, że realne warunki wykorzystania systemu uzbrojenia będą odpowiadały warunkom taktycznym wykorzystania, dla których był projektowany;
- P_w - prawdopodobieństwo wykrycia i identyfikacji celu przez załogę statku powietrznego;
- P_a - prawdopodobieństwo osiągnięcia przez statek powietrzny tzw. strefy możliwych ataków dla określonego (wykorzystywanego) rodzaju uzbrojenia pokładowego;
- P_c - prawdopodobieństwo pozytywnego zakończenia procesu celowania przez załogę statku powietrznego;
- P_s - prawdopodobieństwo ostrzelania (zbombardowania) celu określonym rodzajem uzbrojenia pokładowego;
- P_l - prawdopodobieństwo dolotu lotniczego środka bojowego (rażenia) w stanie zdatności w okolice celu;
- $P_{poraż}$ - prawdopodobieństwo porażenia celu (elementarnego lub grupowego);
- P_u - prawdopodobieństwo porażenia zadanej wartości powierzchni u obiektu niszczenia (celu powierzchniowego).

Zależność (8) opisuje prawdopodobieństwo pozytywnego wykonywania zadania bojowego przez uzbrojony statek powietrzny w jednym ataku celu i stanowi zarys ogólnego modelu (podejścia) stosowanego do oceny zastosowań bojowych wojskowych statków powietrznych.

5. Model narastania skutków działania statku powietrznego w czasie trwania operacji lotniczej

Operacja lotnicza w przypadku konfliktu trwa pewien czas, w którym statek dokonuje pewnej liczby lotów bojowych. W wyniku działania statku powietrznego następuje niszczenie celów przeciwnika. W wyniku lotów bojowych statku następuje kumulowanie się skutków działania i liczba niszczonych celów narasta, czyli efekt działania powiększa się w sposób losowy.

Można się liczyć z przyrostem efektu działania statku powietrznego, jeżeli:

- będzie zapotrzebowanie na usługi lotnicze;
- statek powietrzny i pilot będą gotowi, i niezawodni w czasie lotu;
- prawdopodobieństwo określone w zależności (8) będą miały wartości dodatnie.

Założmy, że użytkowanie statku powietrznego trwa już jakiś czas, czyli odbyła się pewna liczba lotów na zadanie bojowe. Przyjmijmy, że liczba zniszczonych celów w tym czasie wynoszą z . Niech $E[\Delta z]$ będzie wartością oczekiwaną przyrostu liczby zniszczonych celów w czasie jednego lotu na zadanie bojowe. Należy jeszcze określić intensywność lotów statków powietrznych na zadanie i określamy ją następująco:

$$\lambda = \frac{\hat{P}}{\Delta t} \quad (9)$$

gdzie:

- $\hat{P}$ - prawdopodobieństwo odbycia lotu w przedziale czasu Δt ;
- Δt - przedział czasu potrzebny na przygotowanie statku i pilota do lotu na określone zadanie;
- λ - intensywność lotów statku na wykonywanie zadań.

Przyjmuje się, że dla prawdopodobieństw wystąpienia określonych zdarzeń w jednym cyklu (lotu na zadania bojowe) zachodzi następująca zależność:

$$(1 - \lambda \Delta t)(1 - P_{ZB}) + (1 - \lambda \Delta t)P_{ZB} + \lambda \Delta t(1 - P_{ZB}) + \lambda \Delta t P_{ZB} = 1 \quad (10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda \Delta t) + \lambda \Delta t &= 1 \\ (1 - P_{ZB}) + P_{ZB} &= 1 \end{aligned}$$

Po uproszczeniu zapisu zależności (10) otrzymujemy:

$$(1 - \lambda \Delta t) + \lambda \Delta t(1 - P_{ZB}) + \lambda \Delta t P_{ZB} = 1 \quad (11)$$

Zależność (11) wykorzystamy do napisania równania różnicowego. W tym celu przyjmujemy, że $U_{z,t}$ jest prawdopodobieństwem, że po czasie działania statku wynoszącym t efekt wykonywanych lotów będzie wynosił z .

Równanie różnicowe dla zależności (11) przyjmuje w zapisie funkcyjnym postać:

$$u(z, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) u(z, t) + \lambda \Delta t (1 - P_{ZB}) u(z, t) + \lambda \Delta t P_{ZB} [u(z - E[\Delta z], t)] \quad (12)$$

gdzie:

$u(z, t)$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa przyrostu efektów działania statku dla czasu t .

Równanie (12) przekształcimy w równanie różniczkowe cząstkowe. W tym celu dokonamy następujących rozwinięć:

$$\left. \begin{aligned} u(z, t + \Delta t) &= u(z, t) + \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \Delta t \\ u(z - E[\Delta z], t) &= u(z, t) - \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} E[\Delta z] + \frac{1}{2} (E[\Delta z])^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Podstawiając przybliżenia (13) do równania (12) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u(z, t) + \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \Delta t &= (1 - \lambda \Delta t) u(z, t) + \lambda \Delta t (1 - P_{ZB}) u(z, t) + \\ &+ \lambda \Delta t P_{ZB} \left[u(z, t) - \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} E[\Delta z] + \frac{1}{2} (E[\Delta z])^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} \right]. \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} u(z, t) + \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \Delta t &= u(z, t) - \lambda \Delta t u(z, t) + \lambda \Delta t u(z, t) - \lambda \Delta t P_{ZB} u(z, t) + \\ &+ \lambda \Delta t P_{ZB} u(z, t) - \lambda \Delta t P_{ZB} E[\Delta z] \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} \lambda \Delta t P_{ZB} (E[\Delta z])^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Upraszczając otrzymujemy:

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \Delta t = -\lambda \Delta t P_{ZB} E[\Delta z] \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} \lambda \Delta t P_{ZB} (E[\Delta z])^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = -\frac{\lambda \Delta t P_{ZB} E[\Delta z]}{\Delta t} \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\lambda \Delta t P_{ZB} (E[\Delta z])^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2}.$$

W wyniku przekształceń otrzymujemy następującą postać równania różniczkowego cząstkowego zwanym równaniem Fokkera-Plancka.

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = -b \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}, \quad (14)$$

gdzie:

$$b = \lambda P_{ZB} E[\Delta z] \quad (15)$$

$$a = \lambda P_{ZB} (E[\Delta z])^2 \quad (16)$$

Rozwiązanie szczególne równania (14) ma następującą postać:

$$u(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z-bt)^2}{2at}}. \quad (17)$$

Zależność (17) przedstawia funkcję gęstości rozkładu efektów działania statku powietrznego w funkcji czasu operacyjnego.

Korzystając z funkcji gęstości (17) wyznaczamy wartość oczekiwaną uzyskanych efektów.

$$E_t[z] \cong \int_0^{\infty} z u(z,t) dz = bt,$$

gdzie:

$E_t[z]$ - oznacza wartość oczekiwaną liczby zniszczonych celów dla czasu operacyjnego wyznaczającego t .

Stąd:

$$E_t[z] = \lambda P_{ZB} E[\Delta z] \cdot t, \quad (18)$$

gdzie:

$$\lambda = \frac{\hat{P}}{\Delta t}.$$

Zależność (18) po uwzględnieniu powyższej zależności otrzymujemy:

$$E_t[z] = \frac{\hat{P}}{\Delta t} P_{ZB} E[\Delta z] t.$$

Stąd:

$$E_t[z] = \hat{P} P_{ZB} E[\Delta z] \cdot N, \quad (19)$$

gdzie: N jest liczbą lotów statku na zadanie.

$$N = \frac{t}{\Delta t},$$

Δt - przedział czasu operacyjnego przeznaczony na jeden lot ($\Delta t \geq \tau$),

τ - czas lotu statku na wykonanie zadania.

Można określić następująco skuteczność działania wojskowego statku powietrznego w operacji lotniczej.

$$\Omega_t = \frac{\hat{P} P_{ZB} E[\Delta z] N}{\hat{P} P_{ZB} \hat{E}[\Delta z] N} . \quad (20)$$

W mianowniku zależności (20) przyjmujemy, że:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= 1 \\ P_{ZB} &= 1 \end{aligned} ; \quad \hat{E}[\Delta z] - \text{optymalne zniszczenie w jednym locie lub maksymalnie możliwe.}$$

Czyli odnosimy do przypadku optymalnego działania statku. Stąd otrzymujemy zależność na skuteczność w operacji lotniczej:

$$\Omega_t = \frac{\hat{P} P_{ZB} E_t[\Delta z]}{E_t[z]} = \hat{P} P_{ZB} \frac{E_t[\Delta z]}{\hat{E}_t[\Delta z]} . \quad (21)$$

Zależność (21) można przyjąć za wskaźnik skuteczności zbliżenia do celu optymalnego w zwalczaniu celów przeciwnika. Z uwagi na możliwość straty statku powietrznego spowodowanego działaniem przeciwnika tzn. uszkodzenia prowadzącego do utraty statku, nalot t jest zmienną losową.

Niech:

Q - będzie prawdopodobieństwem straty (zniszczenia) statku powietrznego w pojedynczym locie na zadanie bojowe;

$\bar{\lambda}$ - będzie intensywnością utraty statku określone zależnością $\bar{\lambda} = \frac{Q}{\tau}$.

Średni nalot $\bar{T}_t$ (wartość oczekiwana) statku powietrznego w przedziale $(0, t)$ z uwzględnieniem ewentualnych strat własnych określa następująca zależność:

$$\begin{aligned} \bar{T}_t &= \int_0^t t f(t) dt = \bar{\lambda} \left\{ -t e^{-\bar{\lambda}t} \frac{1}{\bar{\lambda}} - \int_0^t t - \frac{1}{\bar{\lambda}} e^{-\bar{\lambda}t} dt \right\} = \\ &= -t e^{-\bar{\lambda}t} + \int_0^t e^{-\bar{\lambda}t} dt = -t e^{-\bar{\lambda}t} + \left(-\frac{1}{\bar{\lambda}} e^{-\bar{\lambda}t} \right) \Big|_0^t = \\ &= -t e^{-\bar{\lambda}t} + \frac{1}{\bar{\lambda}} (1 - e^{-\bar{\lambda}t}) . \end{aligned} \quad (22)$$

Stąd wartość oczekiwana spodziewanych efektów eksploatacji statku powietrznego będzie równa:

$$\begin{aligned} \bar{E}_t[z] &= \frac{\hat{P}}{\Delta t} P_{ZB} E[\Delta z] \cdot \bar{T}_t \\ \bar{E}_t[z] &= \frac{\hat{P}}{\Delta t} P_{ZB} E[\Delta z] \cdot \left[\frac{1}{\bar{\lambda}} (1 - e^{-\bar{\lambda}t}) - t e^{-\bar{\lambda}t} \right] , \end{aligned}$$

$$\bar{E}_t[z] = \hat{P} P_{ZB} E[\Delta z] \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) - t e^{-\lambda t} \right]}_{\bar{N}}, \quad (23)$$

gdzie: $\bar{N}$ - liczba lotów statku w przedziale $(0, t)$ z uwzględnieniem strat własnych.

Dla przypadku z uwzględnieniem strat własnych skuteczność działania wojskowego statku powietrznego można określić następująco:

$$\bar{\Omega}_t = \frac{\hat{P} P_{ZB} E[\Delta z] \bar{N}}{\hat{P} P_{ZB} \hat{E}[\Delta z] N}. \quad (24)$$

Przyjmując w zależności (24), że w mianowniku:

$$\hat{P} = 1; \quad P_{ZB} = 1$$

otrzymujemy następującą zależność na ocenę skuteczności działania statku w operacji lotniczej:

$$\Omega_t = \frac{\hat{P} P_{ZB} E[\Delta z] \bar{N}}{\hat{E}[\Delta z] N}, \quad (25)$$

gdzie:

$\bar{N}$ - liczba lotów statku w przedziale $(0, t)$ z uwzględnieniem strat własnych;

N - liczba lotów statku bez uwzględnienia strat własnych;

$\hat{E}[\Delta z]$ - optymalna liczba zniszczonych celów przeciwnika w czasie jednego lotu;

$E[\Delta z]$ - liczba zniszczonych faktycznie celów przeciwnika w czasie jednego lotu.

Dla $t \rightarrow \infty$ wartość średnia „życia” statku będzie wynosiła $\frac{1}{\lambda}$.

Stąd:

$$\bar{T}_\infty = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{Q}{\tau}} = \frac{\tau}{Q}.$$

Czyli:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\infty[z] &= \frac{\hat{P}}{\Delta t} P_{ZB} E[\Delta z] \cdot \frac{1}{\lambda} \\ \bar{E}_\infty[z] &= \frac{\hat{P}}{\Delta t} P_{ZB} E[\Delta z] \cdot \frac{1}{\frac{Q}{\tau}} = \frac{\hat{P}}{\Delta t} \cdot \frac{\tau}{Q} P_{ZB} E[\Delta z] \\ \bar{E}_\infty[z] &= \hat{P} \frac{\tau}{\Delta t} P_{ZB} E[\Delta z] \cdot \frac{1}{Q}. \end{aligned} \quad (26)$$

Stąd skuteczność trwałości statku będzie:

$$\Omega_{\infty} = \frac{\hat{P} \cdot P_{ZB} \cdot \tau \cdot E[\Delta z]}{\Delta t \cdot Q \cdot \hat{E}[\Delta z]} \quad (27)$$

Zakładamy, że $Q \neq 0$

Według zależności (27) można szacować potencjał użytkowy wojskowego statku powietrznego.

6. Przykładowe określenie przyrostu efektu w czasie jednego wylotu $E[\Delta z]$

Wiadomo, iż efekt działania lotniczych środków bojowych zależy w głównej mierze od celności trafienia, charakterystyk rażącego działania ich ładunków bojowych, ilości użytych środków, a także podatności na zniszczenie atakowanych celów. W celu wyznaczenia wpływu skuteczności środków bojowych na przyrost efektu $E[\Delta z]$ posłużymy się przykładem modelowym. Niech statek powietrzny uzbrojony będzie w cztery kierowane pociski rakietowe klasy p-p (przeznaczone do zwalczania celów powietrznych) i ma możliwość odpalenia dwóch rakiet jedną salwą. Załóżmy, że atakuje on dwa cele powietrzne (np.: parę samolotów) i może wykonać, co najwyżej dwa niezależne ataki (tzw. zajścia) na atakowane cele.

W przyjętej sytuacji atakujący statek powietrzny może nie zniszczyć żadnego celu, zniszczyć jeden lub zniszczyć dwa cele powietrzne przeciwnika.

Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo zniszczenia celu jedną rakieta będzie równe:

$$\bar{p} = drk,$$

gdzie: d – prawdopodobieństwo przygotowania na pokładzie statku powietrznego rakiet do odpalenia,

r – niezawodność rakiety od chwili odpalenia do chwili dotarcia do celu,

k – prawdopodobieństwo zniszczenia celu przez rakieta pod warunkiem dotarcia jej do celu (osiągnięcia obszaru rażenia głowicy bojowej).

Prawdopodobieństwo zniszczenia jednego celu dwiema raketami będzie, zatem równe:

$$q = 1 - (1 - drk)^2,$$

gdzie: $(1 - drk)$ - prawdopodobieństwo niezniszczenia celu jedną rakieta.

Prawdopodobieństwo niezniszczenia celów w dwóch atakach równe jest:

$$q_0 = P\{\Delta z = 0\} = (1 - q)^2.$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia jednego celu w dwóch atakach wynosi:

$$q_1 = P\{\Delta z = 1\} = q(1 - q) + (1 - q)q = 2q(1 - q).$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia dwóch celów równe jest z kolei:

$$q_2 = P\{\Delta z = 2\} = q^2.$$

Stąd:

$$E[\Delta z] = q_0 \cdot 0 + q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot 2.$$

7. Uwagi końcowe

Należy spodziewać się wysokich efektów i skuteczność działań statków, jeżeli:

- zapewni się wysokie prawdopodobieństwo niezawodnego działania pilota i statku powietrznego,
- zapewni się wysoką gotowość i niezawodność systemu uzbrojenia statku,
- wysoka skuteczność środków bojowych,
- działać tak aby prawdopodobieństwo zniszczenia własnego statku powietrznego była jak najmniejsza.

Dysponując danymi odzwierciedlającymi rzeczywiste wskaźniki eksploatacyjne można ocenić rzeczywistą skuteczność działania wojskowego statku powietrznego.

8. Literatura

- [1] Tomaszek H., Wróblewski M.: „Podstawy oceny efektywności eksploatacji systemów uzbrojenia lotniczego”. Dom Wydawniczy „Bellona”, 2001.
- [2] Tomaszek H., Wróblewski M.: „Metoda oceny efektywności eksploatacji wojskowych statków powietrznych”, ZEM. Zeszyt 4(132), 2002, s. 79÷92.
- [3] Tomaszek H., Lorocho L.: „Wprowadzenie do oceny efektywności działania wojskowych statków powietrznych”. ZEM. Zeszyt 1(141), 205, s.67÷79.
- [4] Tomaszek H., Stępie S.: „Wprowadzenie do oceny skuteczności użycia kierowanych rakiet lotniczych”. ZEM. Zeszyt 2(138), 2004, s.77÷88.
- [5] Skora A., Tomaszek H.: „Metoda oceny efektywności eksploatacji wojskowego statku powietrznego”. ZEM. Zeszyt 3(107), 1996, s. 355÷369.

Prof. dr hab. inż. Henryk Tomaszek, absolwent Wojskowej Akademii Technicznej i Uniwersytetu Warszawskiego. Wieloletni pracownik naukowo-dydaktyczny Wojskowej Akademii Technicznej, oraz pracownik naukowy Instytutu Technicznego Wojsk Lotniczych. Główne kierunki działalności naukowej to: mechanika, uzbrojenie lotnicze oraz niezawodność i eksploatacja systemów technicznych.

Mariusz Zieja PhD. Eng., Polish Air Force, graduated from Military University of Technology in 2000. M.Sc. in Mechatronics specialized in Aircraft's Avionics. In 2008 achieved Ph.D. in Mechanical Engineering. Since 2004 Assistant in Air Force Institute of Technology.

Dr inż. Ryszard Kaleta, Kierownik Zakładu Informatycznego Wsparcia Logistyki Instytutu Technicznego Wojsk Lotniczych. Specjalista z zakresu badania bezpieczeństwa i niezawodności. Współtwórca systemów informatycznych wspierających niezawodną i bezpieczną eksploatację techniki lotniczej.