Mittelalterliche Würfelspiele mit Einsatz und Gewinn

Thomas Bronder
Physiker und Mathematiker

Abstract

The second part in the 1284 *Book of Games* of Alfonso X. contains the description of twelve medieval games of dice. Certain information on the amount and timing of bets of the players are only very briefly displayed and are completely missing in several games. The exact course of such games is therefore unknown. What did the players know about their chances of rolling dice and how they could use them when playing the dice? In order to imagine the process of betting for gain, the characteristics of these games of dice are examined and compared with contemporary games of chance.

Zusammenfassung

In Alfons X. *Buch der Spiele* von 1284 werden im zweiten Teil zwölf mittelalterliche Würfelspiele beschrieben. Gewisse Angaben zu Höhe und Zeitpunkten der Einsatzleistungen der Spieler sind nur sehr knapp dargestellt und fehlen bei mehreren Spielen gänzlich. Der exakte Ablauf solcher Spielpartien ist daher nicht bekannt. Was konnten die Spieler damals über ihre Chancen beim Würfeln wissen und ggf. im Spiel nutzen. Um sich den Vorgang des Wettens um einen Gewinn vorstellen zu können, werden die Eigenschaften dieser Würfelspiele untersucht und mit heutigen Glücksspielen verglichen.

Die Fragestellung

Im 1284 fertiggestellten *Buch der Spiele*[1] von Alfons X., genannt „der Weise", werden im zweiten Teil „Das Buch der Würfelspiele" zwölf Würfelspiele

[1]Der *Libro de los Juegos de Ajedrez, Dados y Tablas de Alfonso X el Sabio* ist vor kurzem als Pergament-Faksimile erschienen: Manuel González Jiménez et al., "Libro de los Juegos de Ajedrez, Dados y Tablas", Facsímil del manuscrito que se conserva en la Biblioteca del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial en Madrid, (signatura Ms.T.I.6), Scriptorium, Valencia 2012.

Board Game Studies Journal 12, pp. 1–27
DOI 10.2478/bgs-2018-0001

beschrieben. Es wird zwar dargestellt wie die Spiele durchgeführt werden und wann eine Partie gewonnen oder verloren ist, zur Höhe der Einsätze und Gewinne und zu den Zeitpunkten der Einsätze ggf. auch während einer Spielpartie sind aber nur wenige Hinweise gegeben. In der kommentierten Übersetzung des Buches (Schädler und Calvo 2009) beschreibt Schädler, zu welchen Zeitpunkten der zum Teil mehrstufigen Würfelspiele die Spieler ihre Einsätze ggf. abhängig von den Gewinnaussichten geleistet haben könnten.

Da die anfänglichen Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse in späteren Würfen einer zweiten Spielstufe sich während des Spieles ändern, besteht die Frage, wie wir uns bei diesen Würfelspielen den Ablauf der Wettvorgänge mit bestimmten Einsätzen, speziell in den Spielen *Azar* und *Guirguiesca* vorstellen müssen. Insbesondere geht es um die Frage, ob und wie von den Spielern Wahrscheinlichkeiten bzw. Chancen und Risiken des zu erwartenden Würfelergebnisses für die Festlegung des eigenen Einsatzwertes berücksichtigt werden konnten.

Um solche Spielabläufe zu untersuchen ist es hilfreich, spieltheoretische Eigenschaften solcher Glücksspiele und natürlich die Zusammenhänge mit den Gesetzmäßigkeiten der Wahrscheinlichkeitstheorie zu berücksichtigen, wie sie der Autor in seinem Buch über kommerziell veranstaltbare Spiele (Bronder 2016) anschaulich dargestellt hat. Dazu gehören z. B. die Unterschiede von Spielabläufen, die zwischen nur *zwei* Personen und die zwischen *mehr* Teilnehmern stattfinden und eventuelle *Asymmetrien* der Bedingungen für die Spieler sowie deren Gewinnmöglichkeiten bei den bestehenden *Chancen*.

Eigenschaften der zwölf Würfelspiele

In Alfonsos *Buch der Spiele* werden die in Tabelle 1 aufgeführten Würfelspiele beschrieben.[2] Den meisten dieser Würfelspiele liegt das für Spieler reizvolle *Wiederholungsprinzip* zugrunde, nämlich eine zunächst gewürfelte Augenzahlsumme (als *Suerte*, das ist ein sog. *Chancepunkt*) in einem der weiteren Würfe nochmals zu treffen, bevor eine andere bestimmte Augenzahlsumme eintrifft. Dieses Prinzip der Wiederholungstreffer findet sich später im englischen Würfelspiel *Hazard* und im heute noch gespielten amerikanischen *Craps* wieder. Basulto Santos und Camúñez 2007 haben im *Buch der Spiele* alle Würfelspiele untersucht, die das Wiederholungsprinzip enthalten, und Wahrscheinlichkeiten für die unterschiedlichen Chancen angegeben.

[2]Die Würfelspiele sind im zweiten Teil des Buches, in der deutschen Übersetzung bei Schädler und Calvo 2009 S. 191–202 beschrieben und S. 203–220 kommentiert.

DOI 10.2478/bgs-2018-0001

Die Beschreibung von zwölf unterschiedlich schwierigen Würfelspielen spiegelt die auch heute gültige Erfahrung wieder, dass viele Glücksspiele mit der Zeit langweilig werden, und deswegen verschiedene Spiele abwechselnd gespielt bzw. kompliziertere neu entwickelt werden. Damals war bereits das *Meistwurfspiel* (Schädler und Calvo 2009, S. 192) relativ übersichtlich, das Spiel Azar (ebd., S. 195) dagegen etwas trickreicher mit den unterschiedlichen Gewinnmöglichkeiten innerhalb einer Spielpartie bei Augenzahlsummen in den Bereichen der *Azares* (3 bis 6 und 15 bis 18) oder der *Suertes* (7 bis 14).

In allen zwölf Spielen gibt es jeweils genau zwei Spieler, die gegeneinander antreten und von denen nur einer der beiden gewinnen kann, der andere verliert entsprechend, außer im siebten Spiel *Riffa* (ebd., S. 196), das auch unentschieden enden kann. Bei allen handelt sich um (spieltheoretisch gut untersuchte) *Zweipersonenspiele*, in denen die Spielabläufe sehr übersichtlich sind im Vergleich zu den Abläufen in Mehrpersonenspielen.

Vor jedem Spiel wird ausgewürfelt, wer das Spiel beginnt. Die beiden Spieler sind gleichberechtigte Spielteilnehmer mit entgegengesetzten Interessen, denn beide möchten das Spiel gewinnen. In mehreren Spielpartien wechseln sie sich mit dem Würfeln ab, denn die Positionen der beiden Gegenspieler sind austauschbar. Dadurch ergeben sich selbst dann, wenn die Gewinnchancen nicht in jeder Spielpartie gleich hoch sind, über viele Spielpartien dennoch *symmetrische* Bedingungen für die beiden Spieler.

Im *Buch der Würfelspiele* ist geregelt, in welcher Reihenfolge die Würfel von den beiden Spielern geworfen werden. Ob jedoch alle Würfe ständig nur von einem der beiden Spieler oder von beiden abwechselnd getätigt, werden ist insofern unwichtig, da sich die Chancen dadurch nicht verändern, solange nicht betrogen wird. Es wäre auch denkbar, dass ein neutraler Dritter die Würfe durchführt wie der Croupier beim Roulette. Wie bei allen Spielen, in denen gewürfelt wird, ist es mehr eine psychologische Angelegenheit. Denn welcher Spieler will schon, dass ein anderer, gar sein Gegenspieler ihm ein ungünstiges Ergebnis erwürfelt. Wenn jedoch jeder Spieler abwechselnd dieselben Würfel verwenden darf, stärkt dies das Vertrauen, dass die Würfel echt sind, oder zumindest jedem dieselben Chancen eröffnen.

Einsätze und Gewinne

Zu den ersten *acht* Spielen wird im Text des Buches zwar beschrieben, wann ein Spieler gewinnt oder verliert, über die Art und Höhe von Einsätzen bzw. Gewinnwerten jedoch kein einziger Hinweis gegeben. Allerdings sind in den

	Spielbezeichnung	Anzahl der Würfel	Beschriebene Besonderheiten
1.	**Meistwurfspiel**	mit 2 (oder 3) Würfeln	Höchste Augenzahlsumme gewinnt
2.	**(Mindestwurfspiel)**	mit 2 (oder 3) Würfeln	kleinste Augenzahlsumme gewinnt
3.	**Mit einem Würfel soviel wie mit zweien**	mit 1 Würfel im 1. Wurf und 2 Würfeln im 2. Wurf	(Wiederholungsprinzip bzgl. einer einzelnen Augenzahl)
4.	**Triga**	mit 3 Würfeln	Wiederholungsprinzip
5.	**Azar**	mit 3 Würfeln	Wiederholungsprinzip
6.	**Marlota**	mit 3 Würfeln	Wiederholungsprinzip
7.	**Riffa**	mit 2 Würfeln im 1. Wurf und 1 Würfel im 2. Wurf	auch ein Unentschieden ist möglich
8.	**Pasch mit 1**	mit 2 Würfeln im 1. Wurf und 1 Würfel im 2. Wurf	
9.	**Panquist**	mit 3 Würfeln	Wiederholungsprinzip. Gewinnplan mit ein bis vier Einsätzen (Gewinnen) für ausgewählte Kombinationen der Würfelaugen
10.	**Halber Azar**	mit 3 Würfeln	Wiederholungsprinzip. Gewinnplan mit ein bis vier Punkten als Gewinn für Treffer auf *Azar* oder Chancepunkte mit festgelegtem Punktwert
11.	**Gesteigerter Azar**	mit 3 Würfeln	Wiederholungsprinzip. Gewinnplan mit ein bis vier Punkten als Gewinn für Treffer auf *Azar* oder Chancepunkte mit erhöhtem Punktwert
12.	**Guirguiesca**	mit 2 Würfeln	Wiederholungsprinzip. Vereinbarung für Grundeinsatz vor dem 1. Wurf und beliebiger Einsatz vor dem 2. Wurf

Tabelle 1: Die zwölf Würfelspiele in Alfonsos Buch der Spiele (Schädler und Calvo 2009, S. 192–202)

Miniaturen Wertgegenstände (z. B. Kleidungsstücke) oder Münzen zu sehen, um die offensichtlich gespielt wird.[3]

Im neunten Spiel *Panquist* (Schädler und Calvo 2009, S. 198–199) werden vier Einsätze gleichen Wertes vorgelegt (offenbar Münzen gemäß der zugehörigen Miniatur, Fol. 70r in (ebd., S. 199), von denen je nach den aufgeführten Würfelergebnissen einer, zwei, drei oder alle vier Werte gewonnen werden können. Dieser Gewinnplan ist mit seinen absoluten Gewinnhöhen den Spielern vorab bekannt.

In den Spielen *Halber Azar* (ebd., S. 200) und Gesteigerter Azar (ebd., S. 201) werden ein oder mehrere Punkte gewonnen, deren Wert ebenfalls vor dem Spiel in bestimmten Geldmünzen verbindlich festgelegt wird.

Im letzten Spiel *Guirguiesca* (ebd., S. 201–202) werden offenbar zweierlei Einsätze getätigt. Für Ergebnisse der Augenzahlsummen im Bereich der *Azares*-Kombinationen erhält der Gewinner einen zum Spielbeginn festgelegten Einsatzwert, der ihm als Gewinn vom Verlierer zu geben ist. Wird im 1. Wurf eine Augenzahlsumme im Bereich der *Suertes* getroffen, so kann von beiden Spielern nochmals ein offenbar anderer Einsatzwert festgelegt werden.

In allen Würfelspielen ergibt der Einsatz des einen Spielers stets den (potenziellen) Gewinn des Gegenspielers und umgekehrt je nach Spielergebnis. Somit sind alle zwölf Würfelspiele reine *Nullsummenspiele*.

Die Häufigkeiten der Augenzahlsummen der Würfel

Was konnten die Spieler im 13. Jahrhundert über Ihre Chancen in diesen Würfelspielen wissen?

In allen Spielen wird mit *drei* Würfeln gespielt, außer im letzten (*Guirguiesca*), in dem nur zwei Würfel verwendet werden. Für die beiden ersten Spiele werden wahlweise ebenfalls nur zwei Würfel benötigt. Bei allen Spielen außer dem neunten (*Panquist*) hängt das Spielergebnis von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augenzahlsummen ab (vgl. Abb. 1). Diese symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augenzahlsummen kann berechnet werden, indem die mittleren Häufigkeiten jeder Augenzahlsumme[4]

[3]Die zehn Miniaturen, Folio 67r bis 71v in Schädler und Calvo 2009, S. 194–202, fol. 67r–71v, zeigen entweder Münzen oder Gegenstände auf den Spieltischen als Einsätze für die beschriebenen Würfelspiele.

[4]Die mittlere Häufigkeit jeder Augenzahlsumme (mehrerer Würfel) entspricht den möglichen (abzählbaren) Kombinationen sämtlicher Seiten der zwei bzw. drei Würfel, die dieselbe Augenzahlsumme ergeben.

durch die Anzahl der insgesamt möglichen unterschiedlichen Würfelseiten-Kombinationen mehrerer Würfel dividiert werden, also 36 bei zwei Würfeln und 216 bei drei Würfeln.

Solche Angaben sind in Buch der Würfelspiele aber nicht enthalten, obwohl sie in anderen Schriften wie in *De Vetula* (Klopsch 1967, Verse 449–460) schon kurz zuvor berechnet worden waren. In der Beschreibung des *Triga*-Spiels (Schädler und Calvo 2009, S. 193–194) gibt Alfonso zwar an, durch welche Kombinationen aus sechs Augenzahlen jede Summe von drei Augenzahlen entstehen kann. Die Anzahl dieser Kombinationen entspricht jedoch nicht der (größeren) Anzahl der Kombinationen aller *Würfelseiten* der drei Würfel, welche dieselbe Augenzahlsumme ergeben, denn jede Augenzahl ist mehrmals, nämlich auf jedem der drei Würfel vorhanden. Zur Berechnung der insgesamt möglichen Würfelkombinationen müssen die beschriebenen 56 Kombinationen der *Augenzahlen* für die insgesamt 16 Augenzahlsummen der drei Würfel um ihre Permutationen bezüglich ihrer Verteilung auf die drei Würfel ergänzt werden. Berücksichtigen wir diese Permutationen, so kommen wir auf insgesamt 216 unterschiedliche Wurfergebnisse, die sich in symmetrischer „Hut“-Form auf die unterschiedlichen Augenzahlsummen verteilen (vgl. Abb. 1).

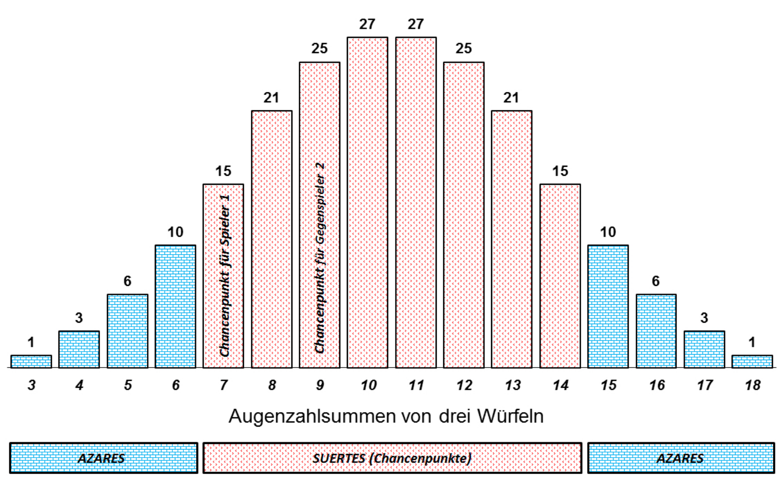

Abbildung 1: Verteilung der mittleren Häufigkeiten der Augenzahlsummen von drei Würfeln. Die Wahrscheinlichkeitsgewichte ergeben sich bei Division durch 216.

Alfons X. „der Weise“ kannte diese Verteilung sicherlich. Die in lateinischer Sprache verfasste Schrift *De Vetula* (Klopsch 1967, Verse 449–460) enthält diese Berechnung, dürfte aber nur wenigen bekannt gewesen sein. Darüber hinaus konnten wohl die meisten Spieler sowieso nicht lesen. Die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln eine der acht Augenzahlsummen im Bereich der *Azares* zu werfen und dadurch die Spielpartie zu beenden, beträgt $40/216 = 18{,}52\%$. Dagegen wird die Spielpartie mit der Wahrscheinlichkeit $176/216 = 81{,}48\%$ weitergeführt, sofern eine der acht Augenzahlsummen im Bereich der *Suertes* gewürfelt wird.

Für die Spieler bestanden darüber hinaus mehrere Schwierigkeiten die beobachteten Häufigkeitsunterschiede zwischen den unterschiedlichen Augenzahlsummen zu verstehen und abzuschätzen. Die Erfahrung zeigt schließlich, dass die verschiedenen Augenzahlsummen nicht nur in jeweils unterschiedlicher (mittlerer) Häufigkeit auftreten, sondern dass jede dieser Häufigkeiten auch starken statistischen Schwankungen unterliegt, die von der mittleren Häufigkeiten abweichen (vgl. die gemessene und berechnete Verteilung beim Würfeln in Bronder 2016, Abb. 3.9). Folglich kann ein offensichtlich seltenes Ereignis, z. B. die Augenzahlsumme „4“ von drei Würfeln ab und zu dennoch vor der häufiger zu erwartenden Augenzahlsumme „10“ eintreffen.

Im Spiel *Panquist* hängt das Spielergebnis dagegen *nicht* von der Verteilung der Häufigkeiten der Augenzahlsummen ab. Die Höhe der Gewinnwerte ist für bestimmte Kombinationen der Augenzahlen festgelegt, die aber nicht den Häufigkeiten der Augenzahlsummen entsprechen. Die Ergebnisse mit drei verschiedenen Augenzahlen, mit einem Zweier-Pasch und mit einem Dreierpasch treffen jeweils gleichwahrscheinlich ein, dennoch sind die Gewinnwerte innerhalb jeder der drei Kombinations-Gruppen (Dreierpasch, Zweierpasch mit einer sich davon unterscheidenden Augenzahl sowie drei verschiedene Augenzahlen) unterschiedlich hoch. Des Weiteren gibt es zwar *drei* Einsätze als Gewinnwert für 14 der 22 gleichwahrscheinlichen Gewinn-Kombinationen mit einem der unterschiedlichen Zweierpaschs aber *vier* Einsätze für die übrigen acht Kombinationen. Für die beiden seltensten Dreierpasch-Kombinationen (333 und 444) sieht der Gewinnplan sogar nur den niedrigsten Gewinn im Wert nur eines Einsatzes vor! Dieser Gewinnplan ist an gewissen Augenzahlsymmetrien der drei Würfel ausgerichtet, welche nicht die tatsächlichen Treffer-Wahrscheinlichkeiten wieder spiegeln.

Das Spiel *Guirguiesca* wird mit nur zwei Würfeln gespielt; die ebenfalls symmetrische Häufigkeitsverteilung der Augenzahlsummen ist daher einfacher. Sie weist nicht mehr die Form eines „Hutes“ auf wie im Fall von drei

Würfeln sondern die eines Dreiecks, und die mittleren Häufigkeiten differieren nicht mehr von maximal 27 zu 1 für die Augenzahlsummen „10“ und „3“ bzw. „11“ und „18“, sondern nur von 6 zu 1 für die Augenzahlsummen „7“ und „2“ bzw. „12“.

Wahrscheinlichkeiten

Der abstrakte Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit ist erst im 17. Jahrhundert entwickelt worden und war im 13. Jahrhundert noch wenig erfassbar, zumal die starken statistischen Schwankungen bei Beobachtung der Häufigkeiten der Augenzahlsummen in nur wenigen Spielen völlig unverständlich gewesen sein müssen. Mit Sicherheit war damals noch nicht bekannt, dass die relativen Schwankungen zwischen den vorkommenden Häufigkeiten und der zugehörigen Wahrscheinlichkeit mit der Anzahl sehr vieler Spiele kleiner werden, das erklärende Gesetz der großen Zahlen wurde ebenfalls erst im 17. Jahrhundert formuliert (Jacob Bernoulli: *ars conjectandi.* 1713 posthum).

Jedenfalls gab es für die Spieler damals noch keine Möglichkeit das genaue (unterschiedliche) Wettrisiko für jede Spielsituation vor und nach dem 1. und 2. Wurf zu berechnen, um es dann ggf. für die Festlegung der Einsatzhöhe zu berücksichtigen. Die (relativen Werte der) mittleren Häufigkeiten der Würfelergebnisse (Augenzahlsummen) entsprechen zwar den theoretischen Wahrscheinlichkeiten, sodass die Chancen für alternative Ergebnisse eines einzelnen Wurfes mehrerer Würfel mit gewisser Erfahrung richtig abgeschätzt werden konnten, die Chancen für ein potenzielles Ergebnis nach späteren Würfen vorauszusagen und es dann zur Berechnung einer geeirefgneten Einsatzhöhe zu benutzen, stellte den Spieler aber vor eine ungleich schwierigere Aufgabe.

Auch Alfons sah keine besondere Veranlassung, die mittleren Häufigkeiten aller Augenzahlsummen von drei Würfeln aufzuführen, selbst wenn er sie gekannt haben sollte. In der Beschreibung des *Triga*-Spiels (Schädler und Calvo 2009, S. 193–194) sind nur die Kombinationen der einfachen Augenzahlen zu jeder Augenzahlsumme aufgeführt und nicht auch deren Permutationen über die drei Würfel. Denn es war lediglich notwendig das Zustandekommen der Augenzahlsummen für alle Spielsituationen aufzulisten, von denen die Beendigung oder Fortführung einer begonnenen Spielpartie abhängt. Dafür brauchten aber nur die Kombinationen der Augenzahlen aufgelistet zu werden, ohne auch noch deren Häufigkeiten anzugeben.

Auch für das mit zwei Würfeln durchgeführte Spiel *Guirguiesca* hat er die Häufigkeitsverteilung nicht angegeben.

Die Wahrscheinlichkeiten im Spiel *Azar*

Dass im Spiel *Azar*[5] (ebd., S. 195) insgesamt acht verschiedene Augenzahlsummen als *Azares* gelten und ebenso viele als *Suertes* (Augenzahlsummen 7 bis 14), suggeriert natürlich, dass die Chancen auf Treffer in beiden Bereichen gleich groß seien (vgl. Abb. 1). Wie wir bereits ausgerechnet haben, verhalten sich die Treffer-Wahrscheinlichkeiten beider Bereiche aber fast wie 1 zu 4,4.

Will ein Spieler bereits zum Spielbeginn die Treffer-Wahrscheinlichkeiten für Ergebnisse im zweiten oder dritten Wurf etc. berücksichtigen, gelten für die folgenden Würfe nur bedingte Wahrscheinlichkeiten. Vor dem ersten Wurf sind deswegen die beiden zu diesem Zeitpunkt berechneten Chancen auf einen *Azar* im ersten Wurf und einen *Re-Azar* im zweiten nicht gleich groß. Die vor dem 1. Wurf berechenbare Wahrscheinlichkeit, dass erst im 2. Wurf ein *Azar* eintrifft, ist geringer als die Wahrscheinlichkeit von 19% im 1. Wurf, weil der *Re-Azar* im 2. Wurf nur unter der Bedingung möglich ist, dass zuvor im 1. Wurf eine Augenzahlsumme im Bereich der *Suertes* mit der Wahrscheinlichkeit 81% eingetroffen ist, also im 2. Wurf nur 15% (= 81%×19%) für den *Re-Azar* (vgl. Abb. 2).

Demnach hat der beginnende Spieler einen gewissen Vorteil, eine Partie durch einen *Azar*-Treffer zur gewinnen, der sich ab zwei Spielpartien, in denen sich beide Spieler abwechseln, natürlich ausgleicht.

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für ein künftiges Ereignis kommt es darauf an, welches Anfangswissen über den möglichen späteren Spielzustand zum Zeitpunkt der Berechnung vorhanden ist. Zu einem späteren Zeitpunkt errechnen sich dann andere Wahrscheinlichkeitswerte[6]: unmittelbar vor dem zweiten Wurf beträgt der Wert für einen *Re-Azar* wieder

[5] Das aus dem arabischen kommende Wort *Azar* bedeutet Würfel oder Zufall und bezeichnet hier einerseits eines der zwölf Würfelspiele als auch in mehreren dieser Spiele eine (jeweils unterschiedliche) Gruppe von Augenzahlsummen, die mit geringer Wahrscheinlichkeit auftreten. Die Gruppe der restlichen Augenzahlsummen wird als *Suertes* bezeichnet. *Suerte* bedeutet sowohl Wurf oder Chance als auch Ergebnis. Wird eine dieser Augenzahlsummen erwürfelt, so nennen wir sie einen *Chancepunkt*, der für einen der beiden Spieler bei wiederholtem Eintreffen den Gewinn der Spielpartie bedeutet.

[6] Zum Zeitpunkt nach dem ersten und vor dem zweiten Wurf ist die Chance auf einen *Re-Azar* natürlich genauso groß wie die vor dem ersten Wurf für einen *Azar* geltende Chance. Nach dem ersten Wurf wird die bedingte Wahrscheinlichkeit nicht mehr zur Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeiten für den zweiten Wurf benötigt.

Abbildung 2: Ablauf beim Würfelspiel *Azar* mit Chancepunkten von z. B. „9“ und „7“.

19%. Die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Augenzahlsummen, also die echten Chancen auf einen Gewinn mussten damals von den Spielern eher geraten werden, als dass sie ihnen bekannt gewesen wären.

Sind in den ersten beiden Würfen keine Augenzahlsummen im Bereich der *Azares* eingetroffen, sondern zunächst die beiden festzulegenden *Chancepunkte* im Bereich der Suertes-Kombinationen, ggf. nach Wiederholung der beiden ersten Würfe (diesmal ohne Bewertung der ggf. eintreffenden Augenzahlsummen im Bereich der *Azares*), wird die Spielpartie erst durch einen weiteren Wurf entschieden. Dazu wird der 3. Wurf solange wiederholt, bis einer der beiden zuvor bestimmten und den beiden Spielern zugeordneten *Chancepunkte* eintrifft und somit feststeht, wer Gewinner und wer Verlierer der Spielpartie ist.

Das Würfelspiel *Azar* wird in rund einem Drittel aller Spielpartien durch einen *Azar*-Treffer im 1. Wurf oder einen *Re-Azar*-Treffer im 2. Wurf beendet. In diesen Fällen kommt es nicht mehr zum 3. Wurf, sondern es beginnt eine neue Spielpartie. Zwei Drittel aller Spielpartien werden jedoch erst durch wiederholtes Eintreffen eines der beiden *Chancepunkte* beendet.

Die Gesamt-Wahrscheinlichkeit zu Beginn einer Spielpartie, dass im dritten oder einem folgenden Wurf ein bestimmter der beiden *Chancepunkte* ein zweites Mal eintrifft, hängt von der bedingten Wahrscheinlichkeit für die

DOI 10.2478/bgs-2018-0001

Chancepunkte ab und – solange keiner der beiden *Chancepunkte* eintrifft – von der Wahrscheinlichkeit dafür, dass weiter gewürfelt werden muss.

Der Ausgleich bei symmetrischen Spielen

Solange sich die beiden gleichberechtigten Spieler bei der Wiederholung des Spieles *Azar* (und der übrigen von Alfonso beschriebenen Würfelspiele) mit dem ersten Wurf abwechseln, sind die Chancen auf den Gewinn zufallsabhängig gleich verteilt. Insofern sind die Spielbedingungen für beide Spieler *symmetrisch*, und ggf. unterschiedliche Chancen in einer einzelnen Spielpartie gleichen sich aus, wenn Spieler und Gegenspieler ihre Rollen vertauschen.

Nach der Wahrscheinlichkeitstheorie gleichen sich in einem symmetrischen Spiel die Gewinne und Einsätze der Spieler über mehrere (sehr viele) Spielpartien aus, wenn beide ständig die gleiche Einsatzhöhe wählen. Dauerspieler hätten bei den beschriebenen Würfelspielen im statistischen Mittel ihren Einsatz wieder zurückgewonnen, auf Dauer also insgesamt nichts verloren, heute verlieren Dauerspieler in den *asymmetrischen* Glücksspielen gegen die Spielbank, den Buchmacher oder den Glücksspielautomaten mit Sicherheit alle Einsätze.

Dennoch gab es nicht nur im Spiel *Azar* – sofern dieselben Spieler nur eine oder wenige Spielpartien durchgeführt haben (konnten) – jeweils nur *einen* Gesamt-Gewinner bzw. -Verlierer *aller* Partien, was zu den in den Miniaturen dargestellten Zwistigkeiten führte. Denn erst bei *sehr vielen* Spielpartien können sich Gewinn und Verlust aufgrund des *Gesetzes der großen Zahl* ausgleichen (vgl. die Ergebnisse in Bronder 2016, Kapitel 3). Wurde aber bereits bei der ersten Spielpartie um einen relativ hohen Einsatzwert gespielt (in der Miniatur Schädler und Calvo 2009, S. 195, fol. 67v sind ein Pferd und ein Mantel zu sehen), konnten sicherlich nicht sehr viele Partien, die zu einem statistischen Ausgleich zwischen beiden Spielern geführt hätten, durchgestanden werden.

Die Höhe von Einsatz und Gewinn im Spiel Azar

Zu Beginn des Spieles ist wohl vereinbart worden, was der Gewinner vom Verlierer erhält. In der Miniatur Fol. 67v zum Spiel *Azar* (ebd., S. 195) sehen wir, wie einer der beiden Spieler sein Pferd als möglichen Gewinn für den Gegenspieler anbietet, sein Gegenspieler setzt einen wertvollen Mantel dagegen. Um diese Einsätze ist dann bis zum Ergebnis einer Spielpartie gewürfelt worden, bis die Partie durch Treffer auf eine Augenzahlsumme im Bereich

DOI 10.2478/bgs-2018-0001

der *Azares* im 1. oder 2. Wurf oder durch einen in einem späteren Wurf wiederholten Treffer auf einen der beiden anfangs erwürfelten *Chancepunkte* beendet wurde.

Für *zusätzliche* Einsatzleistungen sind in der Beschreibung des Spiels keine Hinweise vorhanden. Für eine freiwillige Erhöhung der Einsätze etwa vor dem 3. Wurf gibt es keine rationale Motivation. Selbst wenn die Spieler die Wahrscheinlichkeiten auf Treffer der *Chancepunkte* gekannt hätten oder intuitiv richtig einschätzten, fehlt eine Möglichkeit diese gezielt zu nutzen, sofern die Einsatzwerte beider Spieler nicht gleich hoch sind.

Der Spieler mit dem *Chancepunkt* geringerer Wahrscheinlichkeit (z. B. „7“) hat eigentlich Grund genug, auch seinen (anfänglichen) Einsatz wieder zurückzuziehen, als ihn zu erhöhen. Und dem Gegenspieler mit dem günstigeren *Chancepunkt* (z. B. „9“) bringt die Aufstockung seines Einsatzes nichts zusätzlich ein, denn im Gewinnfall erhält er nur den Grundeinsatz des ersten Spielers und im Verlustfall (bei Eintreffen des *Chancepunktes* des ersten Spielers) verliert er neben seinem eigenen Grundeinsatz auch noch seine unnötige Einsatzerhöhung.

Es ist für einen Spieler nicht logisch, bei höherer Chance freiwillig einen höheren Zusatzeinsatz zu leisten als der Gegner, denn er hat dadurch weder wenn er die Spielpartie gewinnt, noch wenn er sie verliert, einen Vorteil. Es ist nicht ersichtlich, auf welche Weise eine Einsatzerhöhung einem der Spieler nützlich sein sollte. Beide könnten auch gleich zu Spielbeginn einen noch höheren Einsatzwert setzen, ohne dass dies einen Unterschied im Spielverlauf ergeben würde. Dem Würfelspiel *Azar* mangelt es offensichtlich an Anreizen für eine logisch sinnvolle (taktische) Einsatzerhöhung während einer Spielpartie. Auf die Wirkung einer auch im Spiel *Azar* anwendbaren Möglichkeit, dass beide Spieler untereinander stets dieselbe Einsatzhöhe vereinbaren, kommen wir in den beiden nächsten Abschnitten zu sprechen.

Der Ablauf im Spiel Guirguiesca

Es beginnt wiederum der Spieler, der eine höhere Augenzahl würfelt. Im Spiel *Guirguiesca* (Schädler und Calvo 2009, S. 201–202) werden nur zwei Würfel verwendet, wobei die vier Augenzahlsummen „2“, „3“ sowie „11“ und „12“ als Bereich der *Azares* gelten. Dieses Würfelspiel wurde von Basulto et al. in Basulto, Camúñez und Ortega 2009 sowie Basulto Santos und Camúñez 2007 ausführlich untersucht und beschrieben.

Im 1. Wurf gewinnt der erste Spieler, falls er eine Augenzahlsumme im Bereich der *Azares* trifft. Trifft dagegen eine der sieben Augenzahlsummen

DOI 10.2478/bgs-2018-0001

im Bereich der *Suertes* („4 bis 10“) ein, so gilt diese als *Chancepunkt* für den Gegenspieler (vgl. den Spielablauf in Bild 3). Trifft im 2. Wurf ein Re-Azar ein, hat der erste Spieler die nun abgeschlossene Spielpartie verloren. Trifft aber der (im ersten Wurf bestimmte) *Chancepunkt* des Gegenspielers nochmals ein, gewinnt der erste Spieler und die Spielpartie ist ebenfalls beendet.

Sofern im 2. Wurf eine Augenzahlsumme im Bereich der übrigen *Suertes* eintrifft, gilt diese als der noch fehlende *Chancepunkt* für den ersten Spieler und die Spielpartie wird mit weiteren Würfen fortgesetzt. Es wird solange weitergespielt, bis einer der beiden *Chancepunkte* eintrifft und derjenige, dessen *Chancepunkt* dies ist, gewinnt den Einsatzwert des Anderen. Auf die Frage, ob oder wie Gewinnaussichten die Höhe der Einsätze beeinflusst haben können, kommen wir im nächsten Abschnitt noch zurück.

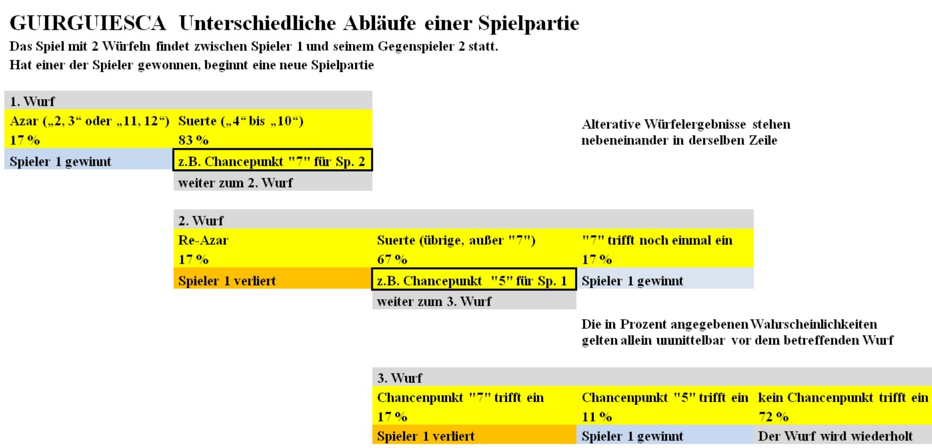

Abbildung 3: Ablauf beim Würfelspiel *Guirguiesca* mit Chancepunkten von z. B. „5“ und „7“.

30% aller Spielpartien des Würfelspiels *Guirguiesca* werden durch Treffer im Bereich der *Azares* entschieden, während 70% durch Wiederholungstreffer auf einen der beiden Chancepunkte beendet werden. Offensichtlich handelt es sich um zwei aufeinanderfolgende Wetten, die erste auf Augenzahlsummen im Bereich der *Azares*, die zweite auf wiederholtes Eintreffen der Augenzahlsummen der beiden *Chancepunkte* im Bereich der *Suertes*. Die zweite Wette findet allerdings nur dann statt, wenn die erste zu keinem das Spiel abschließenden Ergebnis führte. Die beiden Spieler wissen also zu Beginn einer Spielpartie nicht, welche der beiden Wetten zum Tragen kommt, denn das wird erst während des Spielablaufs zufällig entschieden.

Die damals gängige Verfahrensweise bezüglich der Gewinnübergabe erfolgte deswegen offenbar (anders als heute[7]) folgendermaßen. Vor Spielbeginn wird eine Vereinbarung getroffen über den Wert des Nettogewinns, den der Verlierer als seinen Einsatz aber erst dann, wenn das Spielergebnis feststeht, an den Gewinner übergibt[8]. Diese Vereinbarung gilt zunächst für die erste Wette auf das evtl. Eintreffen einer Würfelkombinationen im Bereich der *Azares* und hat gegenüber Einsatzzahlungen in einen gemeinsamen Topf den Vorteil, dass im Falle, dass die *Azares*-Wette nicht realisiert wird, ein dafür im Topf vorgehaltener Einsatz nicht zurückgezahlt zu werden braucht. So kann die Spielpartie mit neuen ggf. unterschiedlichen Einsatzwerten für die zweite Wette fortgesetzt werden.

Werden Einsatzwerte vereinbart, ohne dass sie für den späteren Gewinner in einem gemeinsamen neutralen Topf vorab bereitgehalten werden, so beruht die nach dem Ende der Spielpartie fällige Zahlung des Verlierers an den Gewinner auf gegenseitigem Vertrauen und kann bei hohem Gewinn- bzw- Verlustwert zu Unstimmigkeiten führen. Deswegen haben die Spieler wohl ihr Geld oder die Geldbörse für den Gegner sichtbar auf dem Spieltisch bereitgehalten, wie auf einigen Miniaturen zu sehen ist.

Die beiden sich gegeneinander ausschließenden stufenweisen Wetten mit unterschiedlichen Einsatzwerten (und Gewinnen) in einer Spielpartie kommen grundsätzlich auch für die Würfelspiele *Triga* und *Azar* infrage, obwohl in den zugehörigen Beschreibungen weder auf einen Grundeinsatz für die erste Wette noch auf zusätzliche Einsatzfestlegungen im Falle der Fortsetzung des Spiels hingewiesen wird[9]. Einsatzerhöhungen beider Spieler für die Spielfortsetzung in der zweien Stufe müssten nach dem 2. Wurf noch vor dem 3. Wurf angesagt und vereinbart werden, sobald nämlich feststeht, dass die begonnene Partie bis zum Eintreffen eines der beiden Chancepunkte mit veränderten Risiken fortgesetzt wird.

[7]Heute ist es üblich, dass beide ihren oftmals unterschiedlichen Einsatzwert bereits vor Spielbeginn (oder bei Einsatzerhöhungen auch während des Spiels) in einen gemeinsamen Topf einzahlen, der dann, wenn das Spielergebnis feststeht, nach dem Spiel an den Gewinner als Bruttogewinn (bestehend aus dem Nettogewinn gleich dem Einsatz des Verlierers, und dem eigenen zurückerhaltenen Einsatz).

[8]Siehe Schädler und Calvo 2009, S. 201: *„Und er wird einen Einsatz in dem Wert gewinnen, den sie vorher untereinander vereinbart hatten“*, falls im ersten Wurf ein *Azar* eintrifft.

[9]Schädler ebd. verweist im Kommentar (S. 215) auf die Darstellung in den Miniaturen und beschreibt neben einem Grundeinsatz für die erste Runde die ggf. erforderliche weitere Setzrunde (mit erhöhtem Einsatz), welche aufgrund der veränderten Chancen den besonderen Reiz dieser Spiele ausmachen dürfte.

Einsatzwerte und Gewinnaussichten im Spiel Guirguiesca

Zu Beginn der Spielpartie wird von beiden Spielern der bereitzuhaltende Grundeinsatz gleicher Höhe vereinbart. Wird die Spielpartie bereits im 1. Wurf durch einen Treffer im Bereich der *Azares* zugunsten des ersten Spielers beendet, erhält dieser als Gewinn den vom Gegenspieler vorgehaltenen Grundeinsatz. Wird im 1. Wurf dagegen mit einem Treffer im Bereich der *Suertes* zunächst der *Chancepunkt* für den Gegenspieler ausgewürfelt, darf dieser den Einsatz nun mit dieser Kenntnis neu wählen.

Wird die Spielpartie dann im 2. Wurf durch einen Treffer im Bereich der *Azares* beendet, erhält der Gegenspieler den vom ersten Spieler vorgehaltenen Einsatz als Gewinn. Wird sie aber durch einen nochmaligen Treffer auf den Chancepunkt des Gegenspielers beendet, erhält der erste Spieler den vom Gegenspieler angesagten ggf. erhöhten Einsatz als Gewinn. Ergibt der 2. Wurf allerdings einen Treffer im Bereich der *Suertes*, ist dies der *Chancepunkt* für den ersten Spieler und die Spielpartie wird solange fortgesetzt, bis einer der beiden *Chancepunkt*e erneut eintrifft. Erst dann ist die Spielpartie in der zweiten Stufe beendet, in der es nur noch um den Wiederholungstreffer auf einen der beiden *Chancepunkt*e geht, und der Gewinner erhält vom Verlierer den bereit gehaltenen Einsatz.

Die erneute Festlegung des Einsatzwertes durch den Gegenspieler zwischen dem 1. und dem 2. Wurf dürfte wohl kaum eine Verminderung der Einsatzhöhen ergeben haben. Inwieweit könnte aber die Kenntnis des *Chancepunkt*es des Gegenspielers den Wert des neuen Einsatzes beeinflussen? Und wie hoch sind die Gewinne, wenn der erste Spieler den anfangs vereinbarten Einsatzwert ebenfalls variieren darf?

Der Gegenspieler kann seinen Einsatz bereits im 2. Wurf bei wiederholtem Eintreffen des Chancepunktes verlieren, gewinnt aber im Falle eines Treffers im Bereich der *Azares*. Wird das Spiel aber mit einem Treffer im Bereich der *Suertes* fortgesetzt, wird er mit der Augensumme „7“ als *Chancepunkt* in einem späteren Wurf eher gewinnen als mit der Augensumme „4“, welche viel seltener eintrifft. Selbst wenn er die Chancen dafür, dass er gewinnt, genau kennen würde, scheint er keine direkte Möglichkeit zu haben darauf hinzuwirken, dass er in den günstigen Fällen einen höheren Betrag gewinnt als in den ungünstigen Fällen.

Eine Gewinnsteigerung durch einseitige Einsatzerhöhung scheidet aus, weil der eigene Einsatz den Gewinn des Gegners ergibt und deswegen den eigenen Gewinnwert nicht beeinflusst. Die Höhe des eigenen Gewinns wird allein nur durch den Einsatz des Gegners bestimmt, und zwar unabhängig davon, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Würfel zugunsten des ersten oder zweiten Spielers fallen. Keiner der Spieler kann dadurch, dass er den eigenen Einsatz hoch ansetzt, den Wert seines potenziellen Gewinns steigern. Ganz im Gegenteil, beide müssten, um wenig zu verlieren und gleichzeitig dem Gegner nur einen kleinen Gewinn zu ermöglichen, daran interessiert sein, den eigenen Einsatz zu minimieren.

Eine Erhöhung des Einsatzwertes könnte also nur dem vagen Zweck dienen, den Mitspieler ebenfalls zur Erhöhung seines Einsatzes zu verleiten, um dadurch selbst einen höheren Gewinn zu erhalten. Aber erst, wenn der Gewinn (der Einsatz des Gegners) fest an die eigene Einsatzhöhe gekoppelt ist, bewirkt eine Einsatzerhöhung auch eine Steigerung des Gewinnwertes. Würde einer der Spieler, bevor der Gegenspieler seinen Einsatz festlegt, einen *relativen* Wert bzgl. des gegnerischen (ebenfalls noch nicht festgelegten) Einsatzes angeben (z. B. das Doppelte), dann wäre der Gewinn des Gegners direkt an dessen Einsatz gekoppelt und der Gegner würde nun bei jedem von ihm bestimmten Einsatzwert das Doppelte als Gewinnwert erhalten[10]. Wie könnte aber die Festlegung der Einsätze für die zweite Stufe im Spiel *Guirguiesca* tatsächlich erfolgt sein?

Versuchen wir die einzige Stelle im *Buch der Spiele*, in der von einer Einsatzerhöhung die Rede ist (Schädler und Calvo 2009, S. 201–202), so zu interpretieren, dass die Einsatzerhöhung zum Zwecke eines höheren Gewinns doch einen Sinn macht. Möglicherweise ist unter der Formulierung, dass der erste Spieler im 2. Wurf bei einem Treffer auf den *Chancepunkt* des Gegenspielers in jedem Falle gewinnt, *„gleich ob er den Wurf vorher angekündigt hat oder schwieg“*, eine direkte Kopplung der Einsätze beider Spieler zu verstehen, indem beide Spieler auch für die zweite Stufe des Spiels einen Einsatz in gleicher Höhe vorhalten müssen. Der Gegenspieler kennt vor dem zweiten Wurf seinen *Chancepunkt* und *„wird dafür soviel einsetzen wie er will“*, er darf also einen neuen Wert nennen, der vom anfänglich für die erste Stufe des Spiels vereinbarten Wert abweicht. Um diesen neuen Gewinnwert geht

[10] Dies entspricht dem Ablauf bei einer *privaten Wette* zwischen zwei gleichberechtigten Spielern, bei der es zunächst keinen Gewinnplan gibt, nach dem sich die Spieler richten könnten. Das tatsächliche Chancenverhältnis ist dabei (anders als im Roulettespiel mit festem Gewinnplan) nicht bekannt. So kann ein Spieler dem anderen die Wette zu einem von ihm geschätzten festen Chancenverhältnis z. B. 5:1 anbieten, wobei er dem Gegner – sofern dieser gewinnen sollte – das Fünffache auf dessen Einsatzwert auszahlen müsste. Das Chancenverhältnis wird als relatives Verhältnis zwischen dem eigenen und dem gegnerischen Einsatzwert für den Abschluss einer Wette angeboten. Der Gegner kann darauf eingehen, indem er seinen absoluten Einsatzwert angibt, sodass erst jetzt die absolute Höhe beider Einsätze feststeht.

DOI 10.2478/bgs-2018-0001

es in der Fortsetzung des Spieles. Wenn der erste Spieler dazu schweigt, akzeptiert er den neuen Wert, wenn er dagegen *„den Wurf vorher ankündigt"*, nennt er selbst einen neuen Gewinnwert, der nun vom Gegenspieler akzeptiert werden muss[11]. Die damals möglicherweise selbstverständliche Regel wäre also, dass nicht nur der zu Spielbeginn vereinbarte Einsatz, sondern jeder weitere erhöhte Einsatzwert (egal wer ihn nennt) ebenfalls für beide Spieler gilt, sodass der Gewinnwert immer für beide gleich hoch ist.

Nach Vereinbarung des neuen Gewinnwertes wird das Spiel fortgesetzt, bis einer der beiden *Chancepunkt*e wiederholt eintrifft und der Verlierer dem Gewinner den vereinbarten Gewinn zu übergeben hat. Solcher Wettvorgang entspricht einer privaten Wette mit dem durch gleiche Einsätze ausgedrückten Chancenverhältnis 1:1, bei dem es für beide Spieler um dieselbe Gewinnhöhe geht. Auch im Spiel *Guirguiesca* liegen die Chancen beider Spieler nahe bei 50:50. Selbst wenn den Spielern bekannt war, dass das Chancenverhältnis beider *Chancepunkt*e für einen von beiden günstiger sein konnte, tritt seine Wirkung erst bei Wiederholung sehr vieler Spielpartien ein, weil die reale Streuung um den rechnerischen Wert bei wenigen Spielpartien noch sehr groß ist.

Die vorhandene Diskrepanz zwischen zufälligen Erfahrungswerten der Spielergebnisse und ggf. abgezählten theoretischen Mittelwerten der Würfelkombinationen konnten damals noch nicht verstanden und optimal genutzt werden, denn das erklärende Gesetz der großen Zahl wurde erst Jahrhunderte später erkannt.

Im Würfelspiel *Guirguiesca* ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen vor Beginn einer Spielpartie für den ersten Spieler etwas höher als für den Gegenspieler. Dieses Verhältnis kehrt sich nach dem 1. Wurf für die Fortsetzung der Spielpartie um, denn die Gewinnchance für den ersten Spieler durch einen Azar-Treffer im 1. Wurf gibt es jetzt nicht mehr. Die (mit dem bedingten Wissen) zu diesem Zeitpunkt noch vor dem 2. Wurf erwartbaren Wahrscheinlichkeiten, im weiteren Spielverlauf zu gewinnen, sind für den Gegenspieler bei den Chancenpunkten „7", „6", „8", „5" und „9" günstiger als für den ersten Spieler, der die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit nur bei den Chancenpunkten „4" oder „10" des Gegenspielers erhält. Die genauen Chancenverhältnisse sind zu diesem Zeitpunkt der Neufestlegung des Einsatzes noch nicht erfassbar, da die Bestimmung des *Chancepunkt*es für den ersten Spieler im 2. Wurf noch aussteht. Erst nach dem 2. Wurf können die tatsächlichen Chancenverhältnisse für die Wiederholungstreffer ermittelt

[11] Schädler und Calvo 2009 verweist im Kommentar (S. 219) auf die *„gängige Praxis"*, den zum Sieg erforderlichen Wurf in Verbindung mit einer Einsatzerhöhung vorher anzusagen.

werden. Sie entsprechen den Verhältnissen der mittleren Häufigkeiten beider Chancenpunkte und liegen daher meist weit unter dem Faktor 2 (bzw. ½), der allein bei den beiden Chancepunkten „4“ (bzw. “10“) und „7“ vorhanden ist.

Die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der erste Spieler „1“ oder sein Gegenspieler „2“ das Würfelspiel gewinnt, ist in Tabelle 2 angegeben. Dabei wird unterschieden nach dem Informationsstand vor und nach dem 1. Wurf. Nach dem 1. und vor dem 2. Wurf ist (nur) der Chancepunkt des Gegenspielers 2 bekannt, sodass vier verschiedene Spielergebnisse für die Spieler berechnet werden können. Um diese mit der Wahrscheinlichkeit vor dem 1. Wurf zu vergleichen, ist deren Mittelwert ebenfalls aufgeführt. Hat der Gegenspieler 2 einen der Chancepunkte „4“ oder „10“ erhalten, steigert sich die Gewinnwahrscheinlichkeit des ersten Spielers 1 (von ca. 52% vor dem 1. Wurf) sogar auf fast 55%.

Vergleich von *Guirguiesca* mit *Chancepunkt* und *Craps*

Das amerikanische Würfelspiel *Craps* ist seit Mitte des 19 Jh. mit einigen Vereinfachungen, aber auch Ergänzungen aus dem englischen *Hazard* hervorgegangen, welches schon im 14. Jahrhundert in den Canterbury Tales von Geoffrey Chaucer erwähnt worden ist. Das Würfelspiel *Hazard* und das moderne *Craps* (vgl. z. B. die Regeln in Wikipedia contributors 2018b und Wikipedia contributors 2018a) haben gewisse Ähnlichkeiten mit dem Spiel *Guirguiesca*. Alle drei Spiele werden mit zwei Würfeln gespielt und Gewinn und Verlust hängen in ähnlicher Weise von bestimmten Augenzahlsummen für das Spielergebnis ab.

Das Spiel *Guirguiesca* ist im Laufe der Zeit weiterentwickelt worden. Basulto et al. zeigen, welche Eigenschaften des Spiels *Guirguiesca* in den daraus weiterentwickelten Würfelspielen *Hazard* und *Craps* noch zu finden sind. Das Spiel *Hazard* ist 1674 von Cotton (*The Compleate Gamester*) und 1713 von Montmort (*Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*) beschrieben worden und das Spiel *Craps* im Jahr 1718 von De Moivre (*Doctrine of Chances*). Alle drei Würfelspiele sind antagonistische Zweipersonenspiele, in denen die beiden Wettkontrahenten entgegengesetzte Interessen haben, die nicht gleichzeitig erfüllt werden können. Dabei geht es entweder um den anfänglichen Treffer auf eine Gruppe niedriger Augenzahlsummen (die Gruppe der *Azares* entspricht etwa den Ergebnissen Natural oder *Crap* im Würfelspiel *Craps*), oder um Treffer außerhalb dieser Gruppe, deren Augenzahl-

DOI 10.2478/bgs-2018-0001

Tabelle 2: Wahrscheinlichkeiten für Gewinn oder Verlust im Würfelspiel Guirguiesca

	Wahrscheinlichkeit *vor* dem 1. Wurf, dass im weiteren Spielablauf der	
	Gegenspieler 2 gewinnt	**47,7 %**
	Spieler 1 gewinnt	**52,3 %**
	Summe:	100,0 %
Ohne Berücksichtigung des im 1. Wurf für Gegenspieler 2 erwürfelten Chancepunktes	**Wahrscheinlichkeit *nach* dem 1. Wurf, dass im weiteren Spielablauf der**	
	Gegenspieler 2 gewinnt	**51,8 %**
	Spieler 1 gewinnt	**48,2 %**
	Summe:	100,0 %
Mit Berücksichtigung des im 1. Wurf für Gegenspieler 2 erwürfelten Chancepunktes	**Wahrscheinlichkeit nach dem 1. Wurf, dass im weiteren Spielablauf der**	
"7"	***Gegenspieler 2 gewinnt***	**56,9 %**
	Spieler 1 gewinnt	**43,1 %**
	Summe:	100,0 %
"6" oder "8"	***Gegenspieler 2 gewinnt***	**54,5 %**
	Spieler 1 gewinnt	**45,5 %**
	Summe:	100,0 %
"5" oder "9"	***Gegenspieler 2 gewinnt***	**50,8 %**
	Spieler 1 gewinnt	**49,2 %**
	Summe:	100,0 %
"4" oder "10"	**Gegenspieler 2 gewinnt**	**45,1 %**
	Spieler 1 gewinnt	**54,9 %**
	Summe:	100,0 %

summe in einem der weiteren Würfe wiederholt eintrifft (der Chancepunkt innerhalb der *Suertes* entspricht der *Chance* des *Casters* im *Hazard* und dem *Point* im Würfelspiel *Craps*). Diese Grundidee macht alle drei Würfelspiele in gewisser Weise vergleichbar, soweit wir den Spielablauf betrachten, in der Art der Gewinnplangestaltung gibt es jedoch einige gravierende, noch zu untersuchende Unterschiede in den Spielbedingungen[12].

[12]Beim Vergleich der Eigenschaften kommen Basulto Santos und Camúñez 2007 zum Ergebnis, dass das Teilspiel *J(5 gewinnt)* dem Würfelspiel *Craps* insofern gleicht, dass nach dem 1. Wurf, wenn also der Chancepunkt „5“ für den Gegenspieler eingetroffen ist, für den ersten Spieler die nun für den Rest der Spielpartie geltende Gewinnwahrscheinlichkeit

Beim *Craps* werden die Würfel von einem *Shooter* geworfen, beim *Hazard* ist es der *Caster*. Beide sind nicht nur jeweils neutraler Motor des Zufallsgenerators „Würfel", sie dürfen auch – wie der *erste* Spieler im Würfelspiel *Guirguiesca* – am Spielgeschehen teilnehmen und eine Wette abschließen. Der Wissensstand über die Chancen zu Beginn der Spiele *Hazard* und *Craps* entspricht demjenigen nach dem 1.Wurf im Spiel *Guirguiesca*. In Tabelle 3 sind die Bezeichnungen der Augenzahlsummen in den Würfelspielen *Guirguiesca* und *Craps* mit ihrer Bedeutung für Gewinner und Verlierer gegenübergestellt. Ähnlich verhält es sich auch im Würfelspiel *Hazard*.

Im Spiel *Hazard* entsprechen die Augenzahlsummen *Main* und *Nick* („7" und „11", falls „7" als *Main* ausgewählt wird) dem *Natural* im Spiel *Craps*. Die Treffer auf „2, 3 oder 12" sind die Gleichen wie die als *Crap* bezeichneten Augenzahlsummen, und die Augenzahlsumme zur *Chance* des *Caster*s entspricht derjenigen zum *Point* des *Shooters*. Beim Treffer auf *Main* verliert der *Caster* ebenso wie der *Shooter* bei dem entsprechenden Treffer auf *Seven Out*.

Eine Spielpartie besteht im Würfelspiel *Craps* (wie im Spiel *Hazard* und ähnlich wie im *Guirguiesca*) entweder aus einem einzigen Wurf, wenn eine Natural oder *Craps*-Kombination gewürfelt wird, oder aus mehreren Würfen, wenn im 1. Wurf eine der *Point*-Kombinationen getroffen wurde, und zwar solange bis erneut der *Point* oder die Augenzahlsumme "7" gewürfelt wird. Was sind nun die Besonderheiten in den Gewinnplänen der beiden Würfelspiele *Hazard* und *Craps* gegenüber dem Spiel *Guirguiesca*?

Im *Point* spielt der *Caster* gegen einen einzelnen oder eine Gruppe vieler Setter. Danach wird ein neuer *Caster* bestimmt. Dies entspricht zunächst dem Ablauf im *Guirguiesca* zwischen erstem Spieler und seinem Gegenspieler, aber im *Point* darf als Gegenspieler auch eine Gruppe von Spielern antreten, deren Einsatzsumme relativ hoch sein kann. Der *Caster* darf länger als im Spiel *Guirguiesca* gegen die Gruppe der *Setter* spielen, mehrere Spielpartien lang solange, bis er dreimal nacheinander verloren hat und der nächste Spieler die Aufgabe des *Casters* übernimmt. Zwar tauschen auch hier der *Caster* und die gegen ihn wettenden *Setter* noch ihre Rollen, sodass die wechselnden Gewinnchancen keine Seite bevorzugen, die ggf. lange Folge von Spielpartien gegen die gleiche Gruppe der *Setter* kann aber schon als Vorläufer des Bankspiels angesehen werden, bei welchem eine Partei als

fast dieselbe ist wie die für den *Caster* (Shooter) im Spiel *Craps*. Diese von ihm für das Teilspiel *J(5 gewinnt)* berechnete Gewinnwahrscheinlichkeit von 49,241% für den ersten Spieler stimmt mit dem in der Tabelle 2 (für „5" oder „9") angegebenen Wert überein. Nach Basultos Vergleich ist das Spiel *Craps* mit weniger Würfen bis zum Gewinn schneller beendet als das Teilspiel *J(5 gewinnt)*.

Tabelle 3: Vergleich der Würfelspiele Guirguiesca und Craps

Guirguiesca	**Craps**
Erster Spieler gewinnt, falls im 1. Wurf eine Augenzahlsumme der *Azares* („2, 3, 11, 12“) eintrifft	*Entfällt*
- Ein Treffer im 1. Wurf auf *Suertes* („4“ bis „10“) ergibt den *Chancepunkt* (z. B. „7“) für den Gegenspieler	- Der Chancepunkt „7“ ist für die Spielbank fest vorgegeben
- Ein Treffer im 2. Wurf auf („4“ bis „10“ außer „7“) ergibt den *Chancepunkt* (z. B. „5“) für den ersten Spieler	- Ein Treffer im 1. Wurf auf („4 bis 10“ außer „7“) ergibt den Chancepunkt *Point* (z. B. „5“) für den *Shooter*
Erster Spieler gewinnt, falls im 2. Wurf noch einmal der Chancepunkt (z. B. „7“) des Gegenspielers eintrifft	*Shooter* gewinnt, falls im 1. Wurf die Augensumme *Natural* („7“ oder „11“) eintrifft
Erster Spieler verliert, falls im 2. Wurf eine Augenzahlsumme der *Azares* („2, 3, 11, 12“) eintrifft	*Shooter* verliert, falls im 1. Wurf die Augensumme *Crap* („2, 3, 12“) eintrifft
Erster Spieler gewinnt, falls in einem weiteren Wurf sein *Chancepunkt* (z. B. „5“) eintrifft.	*Shooter* gewinnt, falls in einem weiteren Wurf sein *Point* (z. B. „5“) eintrifft
Erster Spieler verliert, falls in einem weiteren Wurf der *Chancepunkt* (z. B. „7“) des Gegenspielers eintrifft.	*Shooter* verliert, falls in einem weiteren Wurf der Chancepunkt „7“ der Bank (*Seven out*).

Bankhalter bevorzugt wird. Die nicht vollständig symmetrischen Gewinnchancen begünstigen eine der Parteien bis die Rollen gewechselt werden. Dafür spricht auch die geänderte Regel, dass der *Chancepunkt* des Gegners (Gruppe der *Setter*) in einigen Varianten des Spiels nicht mehr erwürfelt wird, sondern vor dem ersten Wurf aus der Gruppe der Augenzahlsummen von „7“ bis „11“ ausgewählt und als *Main*, z. B. „7“ angesagt wird.

Das aus dem *Point* entstandene Spiel *Craps* kann zwar mit dem *Shooter* in gleicher Weise gegen mehrere andere Teilnehmer gespielt werden, üblich ist jedoch, dass es von einer Spielbank angeboten wird, gegen die alle Spieler, zu denen auch der *Shooter* selbst gehört, Wetten abschließen können. Die Augenzahlsumme „7“ ist im *Craps* folgerichtig in allen Spielpartien als gleichbleibender *Chancepunkt* der Spielbank festgelegt.

Der *Shooter* hat zwar dieselbe Funktion wie der erste Spieler beim *Guirguiesca*, er hat jedoch nicht mehr die gleichen Gewinnchancen, denn die Spielbank bietet bei den Wettmöglichkeiten im *Craps* keine fairen symmetrischen Chancenverhältnisse an, so dass allein sie selbst im Durchschnitt vieler Spielpartien einen statistisch konstanten Anteil der Einsätze als sog. Bankvorteil erhält. Die Höhe eines Gewinns im Verhältnis zum Einsatz des Spielers entspricht nicht mehr dem konstant niedrigeren Chancenverhältnis aus den zugehörigen Eintreffwahrscheinlichkeiten. Der *Shooter* kann zwar die absolute Höhe der Gewinnwerte durch einen hohen oder niedrigen Einsatzwert beeinflussen, dabei aber nicht ein ab und zu günstiges Chancenverhältnis wie im Spiel *Guirguiesca* nutzen. Zusätzlich wird die Höhe der Einsätze begrenzt, weil sich die Spielbank gegen zu hohe Gewinnauszahlungen bei hohen Einsatzwerten schützen will.

Darüber hinaus dürfen im *Craps* weitere Spieler, die *Faders*, nebeneinander gegen die Bank antreten, sodass mehrere einzelne Wetten gleichzeitig als voneinander unabhängige Zweipersonenspiele stattfinden. Letzteres bedeutet aber nur, dass die Bank zeitweise vorhandene zufallsabhängige Verluste dadurch eher ausgleichen kann.

In solchen gleichbleibend *asymmetrischen* Glücksspielen gegen eine Spielbank oder einen Spielautomaten sind die statistischen Gewinnchancen so festgelegt, dass die Auszahlquote (Brutto-Gewinnquote) jedes Spielers im Mittel ständig unter 100% liegt und die der Bank darüber, ohne dass die Rollen von Spieler und Gegenspieler (Spielbank) vertauscht werden (können). Insgesamt ist der statistische Bankvorteil von 1,41% aller Einsätze der Spieler beim *Craps*-Spiel sogar kleiner (und der Anteil für den Spieler etwas höher) als beim Roulettespiel. Das gilt jedoch nur für eine einfache Wette wie z. B. auf *Pass*, und nicht mehr bei den im *Craps* möglichen Nebenwetten (*Side bets*) gegen die Spielbank, z. B. darauf, dass im nächsten Wurf eine bestimmte Augenzahl fällt.

In allen kommerziellen Zweipersonenspielen stellt heutzutage die Spielbank oder der Buchmacher etc. den Gegenspieler dar, vertreten durch deren Personal oder gar das Steuerungsprogramm eines Spielautomaten, und aus ihrem kommerziellem Interesse ist der Gewinnplan *asymmetrisch* wie im Spiel *Craps*. Die Würfelspiele *Triga*, *Azar* und *Guirguiesca* wurden dagegen mit vertauschbaren Rollen der Spieler und fast symmetrischem fairem Gewinnplan ohne Spielbank veranstaltet. Für keinen der Spieler gab es – solange sie die Rolle des ersten und zweiten Spielers abwechselnd tauschten – einen sicheren Vorteil. Die statistische Netto-Gewinnquote beträgt Null Prozent bezüglich der eigenen Einsätze und allenfalls der Schankwirt konnte als am Spiel nicht beteiligter Veranstalter über die Vermietung von Spielbrettern und der Würfel gewisse Einnahmen erhalten.

Die Wetten weiterer Personen

Gesondert vom Spiel zwischen den beiden Würfelspielern sind etwaige *Wetten* von dritten Personen auf bestimmte Würfelergebnisse zu betrachten. In Alfonsos Buch der Würfelspiele sind solche zusätzlichen Wetten nicht beschrieben. Möglicherweise schließen die Personen auf den Miniaturen, die sich hinter den Spielern aufhalten, untereinander Wetten um den Ausgang des Spieles ab[13]. Im Gegensatz dazu zeigen die Miniaturen der Schachspiele und der Tricktrack-Spiele oftmals zwei Spieler allein ohne weitere Zuschauer.

Ein zusätzliches Wetten dritter Personen darauf, welcher von zwei Spielern gewinnen wird, ist praktisch bei beliebigen Zweipersonenspielen möglich, in denen es Gewinner und Verlierer gibt und evtl. ein „Unentschieden", nicht nur bei Würfelspielen. Solche Wette stellt aber immer einen eigenen Spielvorgang dar, also ein zusätzliches dem Würfelspiel aufgesetztes Spiel. Sie ist vom Ablauf des Würfelspieles unabhängig, lediglich ein Ergebnis des Würfelspiels (und nicht sein gesamter Verlauf) oder eines sonstigen zufälligen Ereignisses wird zum Abschließen einer Wette und für die Feststellung, wer die Wette gewonnen hat, benötigt. Solche Wetten haben keinen Einfluss auf den Spielablauf zwischen beiden Spielern.

Ergebnisse

Für alle 12 Würfelspiele gilt:

- Es handelt sich um *Zweipersonenspiele.*

An allen 12 Spielen nehmen genau zwei Spieler teil, sodass die Spielabläufe im Gegensatz zu *Mehrpersonenspielen* relativ übersichtlich sind. Eventuelle Wetten der Zuschauer untereinander auf Ereignisse der Spielpartie sind unabhängige eigene Spielabläufe, die die Spielpartie der beiden Spieler nicht beeinflussen.

- Die Spiele sind *Nullsummenspiele.*

Der Einsatz des einen Spielers stellt stets den Gewinn des Gegenspielers dar und umgekehrt. Ein Veranstalter, an den üblicherweise ein fester Anteil von den Einsätzen der Spieler gezahlt wird, sodass das Spiel zum Konstantsummenspiel würde, wird nicht erwähnt.

- In einer einzelnen Spielpartie bieten einige Gewinnpläne unsymmetrische *Gewinnchancen.*

[13] So interpretieren Schädler und Calvo 2009, S. 214 offensichtlich eindeutig die Darstellungen in den Miniaturen.

DOI 10.2478/bgs-2018-0001

Wer eine Spielpartie beginnt, wird jedoch auswürfelt. Ob der erste Spieler oder sein Gegenspieler die besseren Gewinnchancen hat, steht demnach nicht von vornherein fest, sodass keiner als ständiger, am Spiel teilnehmender *Bankhalter* fungieren kann.

- Symmetrische *Spielbedingungen* ermöglichen ausgleichende *Gewinnchancen.*

Erster Spieler und Gegenspieler vertauschen ihre Rollen und somit ihre Gewinnchancen. Damit sind die Gewinnmöglichkeiten über mehrere Spielpartien symmetrisch auf beide aufgeteilt. Keiner von beiden kann den statistischen Vorteil eines Bankhalters beanspruchen. Folglich beträgt auch für beide Spieler die statistische Netto-Gewinnquote Null Prozent (entsprechend einer fairen Brutto-Gewinnquote von 100% der jeweilig eigenen Einsätze). Nach dem *Gesetz der großen Zahl* kommt diese statistische *Chancengleichheit* allerdings bei Durchführung von zu wenigen Spielen nicht zum Tragen, sodass einer der beiden Spieler in der Regel dennoch vom Zufall bevorzugt wird und über mehrere Spielpartien insgesamt einen deutlichen Gewinnwert erlangt; bei wenigen Spielen auch entgegen den theoretischen Chancenverhältnissen.

- *Wahrscheinlichkeiten* waren nicht bekannt.

Der Begriff der (mathematischen) Wahrscheinlichkeit und die Gesetzmäßigkeiten der Wahrscheinlichkeitstheorie waren im 13. Jahrhundert noch nicht bekannt. Allenfalls konnten zu jeder Augenzahlsumme die Kombinationen aller Würfelseiten und Würfel aufgezeichnet und abgezählt werden, wobei die Permutationen, also die Vertauschung der Würfel mitgezählt werden mussten. Die Anzahl dieser Kombinationen stellt die mittlere Häufigkeit der zugehörigen Augenzahlsumme dar. Selbst wer diese kannte oder aus Erfahrung richtig abschätzte, konnte ein günstiges Chancenverhältnis erst mit vielen Spielpartien nutzen, bei denen der Mittelwert nicht mehr allzu starken Schwankungen unterliegt.

Für das Spiel Guirguiesca gilt:

Das Würfelspiel *Guirguiesca* enthält zwei *kombinierte* Wetten mit unterschiedlichen Gewinnchancen, von denen aber zufallsabhängig nur eine zum Tragen kommt. Die erste Wette wird durch Treffer auf eine Augenzahlsumme im Bereich der Azares-Kombinationen im 1. und 2. Wurf entschieden, falls nicht der Bereich der *Suertes* getroffen wird als Ausgangspunkt für die zweite Wette. Diese wird nach dem Wiederholungsprinzip im 2. oder einem späteren Wurf entschieden.

Falls die Azares-Kombination nicht eintrifft, wird der anfangs vereinbarte

DOI 10.2478/bgs-2018-0001

Gewinnwert nicht ausgezahlt und von beiden Spielern ein neuer, ggf. höherer Einsatzwert gemäß den (vermuteten) Gewinnchancen (vgl. Tabelle 2) als potenzieller Gewinn bereitgehalten.

Die Höhe der unterschiedlichen Gewinnchancen gemäß den mittleren Häufigkeiten der sieben Augenzahlsummen im Bereich der *Suertes* bei nur zwei Würfeln waren möglicherweise einigen Spielern bekannt aufgrund der einfach abzählbaren Würfelseiten-Kombinationen (maximal 6 für die Augensumme „7“). Neben dem Chancenverhältnis 1:1 gibt es nur sechs weitere Chancenverhältnisse (von 2:1 bis 6:5) und deren Kehrwerte, die sich aufgrund der kleinen einstelligen Zahlen leicht merken lassen. Sie übersteigen in keinem Fall den Faktor 2 (bzw. 0,5).

Diese exakten Wahrscheinlichkeitsverhältnisse sind aber nur bei Kenntnis beider Chancepunkte berechenbar. Nach dem 1. und vor dem 2. Wurf ist jedoch zunächst allein der *Chancepunkt* des Gegenspielers ausgewürfelt, sodass die Chancenverhältnisse nur mit Hilfe eines Mittelwertes für die möglichen Chancepunkte des ersten Spielers abgeschätzt werden können (siehe Tabelle 2). Ein Spieler, dem dies gelang, war dann im statistischen Vorteil, sofern er viele Spielpartien absolvierte.

Zur Festlegung der Einsatz- bzw. Gewinnhöhe gab es wohl die Regelung, dass – auch bei einer Erhöhung des Wertes durch einen der beiden Spieler über den anfänglichen Grundeinsatz hinaus – für beide Spieler immer derselbe Wert als vereinbart galt. Dadurch ist die Höhe des möglichen Gewinns immer im Verhältnis 1:1 an jeden beliebigen Wert des eigenen Einsatzes gekoppelt, sodass die Veränderung des eigenen Einsatzwertes auch eine proportional geänderte Gewinnhöhe ergibt.

Das Spiel *Guirguiesca* kann aufgrund der vielen Parallelen im Spielablauf als Vorläufer des späteren englischen Hazard (mit wechselndem Bankhalter) und des daraus weiterentwickelten amerikanischen *Craps* mit der Spielbank als gleichbleibendem Gegenspieler angesehen werden. Von der Spielbank wird für die Wetten ein (natürlich) konstant asymmetrischer Gewinnplan mit jeweils festen Gewinnquoten bei einer Brutto-Gewinnquote unter 100% angeboten.

Für die Spiele Azar und Triga gilt:

Das Würfelspiel *Azar* enthält ebenfalls zwei kombinierte Wetten mit unterschiedlichen Gewinnchancen, von denen nur eine zufallsabhängig zum Tragen kommt. Die erste Wette wird durch Treffer auf eine Augenzahlsumme im Bereich der *Azares*-Kombinationen im 1. und 2. Wurf entschieden, falls nicht der Bereich der *Suertes* getroffen wird als Ausgangspunkt für die zweite Wette. Diese wird nach dem Wiederholungsprinzip im 3. oder einem späteren Wurf entschieden.

Das *Triga*-Spiel unterscheidet sich nur wenig vom Spiel *Azar*. Die Entscheidung im 1. Wurf erfolgt durch Treffer sowohl auf Augenzahlsummen im Bereich der *Azares* als auch auf Dreier-Paschs. Erfolgen im 1. und 2.Wurf Treffer auf Augenzahlsummen im Bereich der *Suertes*, so wird nach dem nach dem Wiederholungsprinzip weiter gespielt, bis einer gewinnt.

Sofern in beiden Spielen *Triga* und *Azar* die erste Wette nicht zum Tragen gekommen und der dafür vorgesehene Grundgewinn fortgefallen ist, konnte ab dem 3. Wurf mit einem für beide Spieler neu vereinbarten selben Gewinnwert für die zweite Wette weitergespielt werden. Nach dem 2. Wurf waren beide Chancepunkte bekannt und das theoretische Chancenverhältnis konnte (erschwert durch die Berechnung bei Verwendung von drei Würfeln) bestimmt werden. Einigen Spielern könnten die Gewinnchancen gemäß den mittleren Häufigkeiten der acht Augenzahlsummen von drei Würfeln im Bereich der *Suertes* (maximal 27 für die Augensummen „10 oder 11“) aus der lateinisch verfassten Handschrift *De Vetula* (Klopsch 1967, Vers 460) bekannt gewesen sein. Neben dem Chancenverhältnis 1:1 gibt es sechs weitere Chancenverhältnisse (von 27:15 bis 27:25) und deren Kehrwerte. Sie übersteigen in keinem Fall den Faktor 1,8 (bzw. reziprok 0,6).

Literatur

Basulto Santos, J. und J. A. Camúñez (2007). “El juego guirguiesca del Libro de los Dados de Alfonso X (siglo XIII) y el actual juego del craps. Similitudes y diferencias en el cálculo de sus probabilidades”. In: *Estadística Española* 170, S. 173–192.

Basulto, J., J. A. Camúñez und F. J. Ortega (2009). “Juegos de azar, guirguesca y marlota del Libro de los Dados del Alfonso X El Sabio”. In: *Alcanate. Revista de Estudios Alfonsíes*, S. 86–116.

Bronder, T. (2016). *Spiel, Zufall und Kommerz. Theorie und Praxis des Spiels um Geld zwischen Mathematik, Recht und Realität.* Springer.

Jiménez, M. (2010). *Libro de los juegos de ajedrez, dados y tablas de Alfonso X el Sabio.* Link zum Buch, aufgerufen am 2. Februar 2018. Scriptorium.

Klopsch, P. (1967). *Pseudo-Ovidius. De Vetula.* S.209-212 (= liber primus, Vers 398-478). Mittellateinische Untersuchungen und Texte, Bd.II.

Schädler, U. und R. Calvo (2009). *Alfons X. „der Weise“ Das Buch der Spiele.* Buland, R., Schädler U. (Hrg.): Ludographie – Spiel und Spiele. Band I. Lit Verlag Wien.

DOI 10.2478/bgs-2018-0001

Wikipedia contributors (2018a). *Würfelspiel Craps—Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [aufgerufen am 2. Februar 2018]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Craps.

— (2018b). *Würfelspiel Hazard—Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [aufgerufen am 2. Februar 2018]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Hazard.