DOI: 10.2478/awutm-2014-0013
DE GRUYTER OPEN

Analele Universităţii de Vest,
Timişoara
Seria Matematică – Informatică
LII, 2, (2014), 97– 109

Sur l'unicité de la forme des factorisations de longueur maximale d'une extension purement inséparable finie

El Hassane Fliouet

Résumé. Let K/k be a finite purely inseparable extension of field k of characteristic $p > 0$. A factorization of length m of K/k is the data of m intermediate fields $K_1, K_2, \cdots, K_m$ of K/k such as $K \simeq K_1 \otimes_k K_2 \otimes_k \cdots \otimes_k K_m$. In the present paper, we are especially interested in the uniqueness of the form of factorizations of maximum length.

AMS Subject Classification (2000). 12F15
Keywords. Purement inséparable, factorisation, e-factorisation, modulaire

1 Introduction.

Soit K/k une extension finie de caractéristique $p > 0$. Une partie G de K est dite r-générateur de K/k, si $K = k(G)$. Si de plus, $|G|$ est minimum, G est dite r-base de K/k. Soient B_1 une r-base de K/k et B_2 une p-base de k (c'est-à-dire B_2 est un r-générateur minimal de k/k^p). On note $di(K/k) = card(B_1)$ et $di(k) = card(B_2)$, $di(K/k)$ s'appelle le degré d'irrationalité de K/k et $di(k)$ le degré d'imperfection de k. Une partie A de K est dite r-libre sur k, si A est une r-base de $k(A)/k$. Dans tout le reste de cette partie, on suppose que K/k est purement inséparable finie. Soit $x \in K$, on pose :

$o(x/k) = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid x^{p^m} \in k\}$ et $o_1(K/k) = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid K^{p^m} \subset k\}$. Une r-base $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de K/k est dite canoniquement ordonnée, si pour $j = 1, 2, \ldots, n$, on a $o(a_j/k(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1})) = o_1(K/k(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}))$. L'entier $o(a_j/k(a_1, \ldots, a_{j-1}))$ ainsi obtenu est indépendant du choix de la r-base B de K/k (cf. [4], p. 90, satz 14). On l'appelle le j-ème exposant de K/k, et on le note $o_j(K/k)$. Par convention, si $j > n$, on pose $o_j(K/k) = 0$. On rappelle que K/k est dite modulaire, s'il existe une r-base $\{a_1, \cdots, a_n\}$ de K/k telle que $K \simeq k(a_1) \otimes_k \cdots \otimes_k k(a_n)$. Faute d'être modulaire, K admet toujours une factorisation en produit tensoriel sur k d'extensions irréductibles non toutes simples. Dans [1] nous avons introduit une forme particulière de factorisation définie comme suit : soient K_1/k et K_2/k deux sous-extensions de K/k avec $di(K_1/k) = i_1$ et $di(K_2/k) = i_2$. Si $K \simeq K_1 \otimes_k K_2$, et si de plus $(o_1(K_1/k), \cdots, o_{i_1}(K_1/k), o_1(K_2/k), \cdots, o_{i_2}(K_2/k))$ est la liste des exposants de K/k, on dit que $K_1 \otimes_k K_2$ est une e-factorisation de K/k. Il est facile de voir que c'est une lois associative, ce qui permet de donner un sens à une e-factorisation d'un nombre quelconque de facteurs sans spécifier les parenthèses. Par récurrence sur $[K : k]$, on vérifie aussitôt que K/k admet une e-factorisation de longueur maximale. De plus, dans [1] nous avons montré que si $K_1 \otimes_k \cdots \otimes_k K_m$ et $L_1 \otimes_k \cdots \otimes_k L_m$ sont deux e-factorisations de K/k avec m maximal, alors pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$, on a $di(K_j/k) = di(L_j/k)$, et donc pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $o_h(K_j/k) = o_h(L_j/k)$. Par conséquent, dans la classe des e-factorisations de longueur maximale les facteurs conservent leurs tailles et leurs formes, donc on peut espérer étendre ce résultat à d'autres types de factorisations. Le présent papier s'inscrit dans cette direction, on s'intéresse surtout à l'unicité de la forme des factorisations de même longueur maximale. Dans ce contexte, on démontre que si $di(K/k) \leq 4$ et si K/k admet une e-factorisation de longueur maximale m, alors toute autre factorisation de K/k de longueur m est nécessairement une e-factorisation. En particulier, si $2 < di(K/k) \leq 4$ et si K/k admet deux types différents de factorisations de longueur $di(K/k) - 1$ dont l'une est une e-factorisation, alors K/k est modulaire. Cependant, si $di(K/k) \geq 5$, il existe une classe importante d'extensions qui ne conservent ni la taille ni la forme des facteurs d'une factorisation de longueur maximale. A cette occasion, on présente un exemple d'extension de degré d'irrationalité 5 admettant deux différents types de factorisations de même longueur maximale dont l'une est une e-factorisation.

Enfin, nous attirons l'attention que les propriétés du degré d'irrationalité, des exposants, et des extensions modulaires sont de grande importance pour ce travail. Pour cela, nous avons cru bon de rappeler ce qui est nécessaire dans la section suivante.

2 Terminologies et notations.

2.1 Degré d'irrationalité d'une extension.

Désormais, et sauf mention expresse du contraire, K/k désigne une extension algébrique finie (souvent purement inséprable) de caractéristique $p \neq 0$. Le résultat ci-dessous intervient fréquemment dans ce travail. Il permet de ramener l'étude des propriétés de " r-indépendance " sur k aux propriétés de p-indépendance sur $k(K^p)$ lesquelles sont plus riche (théorème de la base incomplète $\cdots$), $K/k(K^p)$ étant de hauteur 1.

($\mathbf{P_1}$) *Soit K/k une extension purement inséparable finie. Une partie G de K est une r-base de K/k si, et seulement, si G est une r-base de $K/k(K^p)$ (cf.* [1]*, p. 370, proposition 1).*

Notamment, nous utilisons souvent la propriété suivante :

Si K/k est de hauteur ≤ 1 ($K^p \subseteq k$), alors un système $(a_1, \cdots, a_n)$ de K est r-libre sur k si, et seulement, si $a_i \notin k(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ pour $i = 1 \cdots n$.

Voici les autres résultats du degré d'irrationalité dont on a besoin.

($\mathbf{P_2}$) *Pour toute sous-extension L/L' de K/k, on a $di(L/L') \leq di(K/k)$ (cf.* [1]*, p. 371, théorème 1).*

($\mathbf{P_3}$) *Pour toute extension finie K/k, on a $di(K/k) \leq di(k)$ (cf.* [1]*, p. 372, théorème 2).*

($\mathbf{P_4}$) *Soient K_1/k et K_2/k deux sous-extensions de K/k, k-linéairement disjointes. Soient $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}\}$ et $\{\beta_1, \cdots, \beta_{n_2}\}$ deux r-bases respectivement de K_1/k et K_2/k. On a :*

(i) *$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}\}$ est une r-base de $K_1(K_2)/K_2$. En particulier, $di(K_1(K_2)/K_2) = di(K_1/k)$.*

(ii) *Supposons que K_1/k et K_2/k sont non séparables, alors $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \cdots, \beta_{n_2}\}$ est une r-base de $K_1(K_2)/k$. En outre, $di(K_1(K_2)/k) = di(K_1/k) + di(K_2/k)$ (cf.* [1]*, p. 371, proposition 3).*

2.2 Exposants d'une extension.

De même, voici les principaux résultats dont on a besoin et qui font intervenir les exposants.

($\mathbf{P_5}$) *Soient K et L deux corps intermédiaires d'une extension Ω/k, avec K/k purement inséparable finie. Alors, pour tout entier j, on a $o_j(K(L)/k(L)) \leq o_j(K/k)$ (cf.* [1]*, p. 373, proposition 5).*

($\mathbf{P_6}$) *Soit K/k une extension purement inséparable finie. Pour toute sous-extension L/L' de K/k, et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $o_j(L/L') \leq o_j(K/k)$ (cf.* [1]*, p. 374, proposition 6).*

($\mathbf{P_7}$) *Soient m_j le j-ème exposant d'une extension purement inséparable finie K/k, et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ une r-base canoniquement ordonnée de K/k. On a :*

(i) $k(K^{p^{m_j}}) = k(\alpha_1^{p^{m_j}}, \cdots, \alpha_{j-1}^{p^{m_j}})$.

(ii) *Soit $\Lambda_j = \{(i_1, \cdots, i_{j-1})$ tel que $0 \leq i_1 < p^{m_1 - m_j}, \cdots, 0 \leq i_{j-1} < p^{m_{j-1} - m_j}\}$. Alors, $\{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1})^{p^{m_j}\xi}$ tel que $\xi \in \Lambda_j\}$ est une base de $k(K^{p^{m_j}})$ sur k.*

(iii) *Soient $n \in \mathbb{N}$ et j le plus grand entier tel que $m_j > n$. Alors, $(\alpha_1^{p^n}, \cdots, \alpha_j^{p^n})$ est une r-base canoniquement ordonnée de $k(K^{p^n})/k$, et sa liste des exposants est $(m_1 - n, \cdots, m_j - n)$ (cf. [2], p. 140, proposition 5.3).*

($\mathbf{P_8}$) *Si K_1/k et K_2/k sont deux sous-extensions purement inséparables de K/k, alors K_1/k et K_2/k sont k-linéairement disjointes si, et seulement, si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $o_j(K_1(K_2)/K_2) = o_j(K_1/k)$. En particulier, si $K \simeq K_1 \otimes_k K_2$, et si $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1})$ est une r-base canoniquement ordonnée de K_1/k, alors $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1})$ est aussi une r-base canoniquement ordonnée de K/K_2 (cf. [1], p. 374, proposition 7).*

($\mathbf{P_9}$) *(Algorithme de la complétion des r-bases) Soient K/k une extension purement inséparable finie et G un r-générateur de K/k. Soit $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ un système de K tel que $o(\alpha_j/k(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1})) = o_j(K/k) > 0$ pour tout $1 \leq j \leq s$. Si $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \cdots$ est une suite d'éléments de G vérifiant $o(\alpha_{s+i}/k(\alpha_1, \cdots, \alpha_{s+i-1})) = \max_{a \in G}(o(a/k(\alpha_1, \cdots, \alpha_{s+i-1}))) > 0$, alors cette suite s'arrête sur un plus grand entier n tel que $o(\alpha_n, k(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})) > 0$, et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est une r-base canoniquement ordonnée de K/k (cf. [1], p. 374, proposition 8).*

2.3 Extensions modulaires.

Une extension K/k est dite modulaire, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^{p^n} et k sont $K^{p^n} \cap k$-linéairement disjoints. Cette notion a été introduite pour la première fois par Swedleer dans [5]. Elle caractérise les extensions purement inséparables qui sont produit tensoriel sur k d'extensions simples. Soient m_j le j-ème exposant de K/k et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ une r-base canoniquement ordonnée de K/k, donc d'après ($\mathbf{P_7}$), pour tout $1 < j \leq n$, il existe des constantes uniques $C_\varepsilon \in k$ telles que $\alpha_j^{p^{m_j}} = \sum_{\varepsilon \in \Lambda_j} C_\varepsilon (\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1})^{m_j \varepsilon}$, où $\Lambda_j = \{(i_1, \cdots, i_{j-1})$ tel que $0 \leq i_1 < p^{m_1 - m_j}, \cdots, 0 \leq i_{j-1} < p^{m_{j-1} - m_j}\}$. Ces relations s'appellent les équations de définition de K/k, car elles engendrent l'idéal maximal de toutes les relations entre les α_i, $1 \leq i \leq n$, lequel détermine K/k.

Voici le reste des résultats dont on a besoin :

($\mathbf{P_{10}}$) **[Critère du modularité]** *Sous les notations ci-dessus, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *K/k est modulaire.*
2. *Pour toute r-base canoniquement ordonnée $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de K/k, les $C_\varepsilon \in k \cap K^{p^{m_j}}$ pour tout $1 < j \leq n$.*
3. *Il existe une r-base canoniquement ordonnée $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de K/k telle que les $C_\varepsilon \in k \cap K^{p^{m_j}}$ pour tout $1 < j \leq n$ (cf. [2], p. 142, proposition 1.4).*

Ce critère permet de trouver facilement les extensions non modulaires.

Exemple 2.1. *Soient P un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $k = P(X, Y, Z)$ le corps des fractions rationnelles aux indéterminées X, Y, Z, et $K = k(\alpha_1, \alpha_2)$ avec $\alpha_1 = X^{p^{-2}}$ et $\alpha_2 = X^{p^{-2}}Y^{p^{-1}} + Z^{p^{-1}}$. Il est immédiat que $o_1(K/k) = 2$ et $o_2(K/k) = 1$ ($\alpha_2^p = Y\alpha_1^p + Z$). Si K/k est modulaire, d'après le critère du modularité, $Y^{p^{-1}}$ et $Z^{p^{-1}} \in K$; et donc $K' = k(X^{p^{-2}}, Y^{p^{-1}}, Z^{p^{-1}}) \subset K$. Par suite, $di(K'/k) = 3 < di(K/k) = 2$, contradiction.*

Comme conséquence de ce critère, on a :

($\mathbf{P_{11}}$) *Soit K/k une extension purement inséparable finie de degré d'irrationalité n. Si K/k est equiexponentielle, alors K/k est modulaire. En particulier, $K/k(K^{p^{m_n}})$ est equiexponentielle (donc modulaire), où $m_n = o_n(K/k)$.*

($\mathbf{P_{12}}$) *Soient K_1 et K_2 deux corps intermédiaires d'une extension purement inséparable finie K/k, k-linéairement disjoints. Si K/k est modulaire, il existe une r-base canoniquement ordonnée $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de K/K_1 telle que $K \simeq K_1 \otimes_k k(\alpha_1) \otimes_k \cdots \otimes_k k(\alpha_n)$. En particulier, K/K_1 est modulaire, si K/k l'est.*

Le résultat suivant de waterhouse joue un rôle important dans l'étude des extensions modulaires (cf. [6], p. 39, theorem 1.1).

($\mathbf{P_{13}}$) *Soit $(K_j)_{j\in I}$ une famille quelconque de sous-corps d'un corps Ω. Si K est un sous-corps de Ω tel que K et K_j sont $K_j \cap K$-linéairement disjoints pour tout $j \in I$, alors K et $\bigcap_{j\in I} K_j$ sont $K \cap (\bigcap_{j\in I} K_j)$-linéairement disjoints.*

Il en résulte aussitôt que la modularité est stable supérieurement et inférieurement par une intersection quelconque. Plus précisément, on a :

($\mathbf{P_{14}}$) (*i*) *Soit* $(K_j/k)_{j\in I}$ *une famille de sous-extensions d'une extension* K/k. *Si* K_j/k *est modulaire pour tout* $j \in I$, *alors* $\bigcap_{j\in I} K_j/k$ *est modulaire.*

(*ii*) *Si* K/K_j *est modulaire pour tout* $j \in I$, *alors* $K/\bigcap_{j\in I} K_j$ *est modulaire. En particulier,* K/k *admet une plus petite sous-extension* m/k *(resp. une plus petite extension* M/K*) telle que* K/m *(resp.* M/k*) est modulaire.*

3 Résultats principals.

Soit K/k une extension purement inséparable finie. Une factorisation de longueur m de K/k est la donnée de m corps intermédiaires $K_1, K_2, \cdots, K_m$ de K/k tels que $K \simeq K_1 \otimes_k K_2 \otimes_k \cdots \otimes_k K_m$. Si de plus, $(o_1(K_1/k), \cdots, o_{n_1}(K_1/k), o_1(K_2/k), \cdots, o_{n_2}(K_2/k), \cdots, o_1(K_m/k), \cdots, o_{n_m}(K_m/k))$ est la liste des exposants de K/k, où $n_j = di(K_j/k)$ pour $j = 1, \cdots, m$, alors $K_1 \otimes_k K_2 \otimes_k \cdots \otimes_k K_m$ s'appelle *e*-factorisation de K/k. Par récurrence sur $[K : k]$, on voit que K/k admet toujours une factorisation irréductible (K_i/k irréductible), cependant il n'y a pas unicité de factorisation.

Exemple 3.1. *Soient* P *un corps parfait de caractéristique* $p > 0$, $k = k_0(X, Y, Z)$ *avec* (X, Y, Z) *algébriquement libre sur* P, *et* $K = k(X^{p^{-2}}, X^{p^{-2}}Y^{p^{-1}} + Z^{p^{-1}}, Y^{p^{-1}})$. *On a*

$$\begin{aligned} K &\simeq k(X^{p^{-2}}, X^{p^{-2}}Y^{p^{-1}} + Z^{p^{-1}}) \otimes_k k(Y^{p^{-1}}), \\ &\simeq k(X^{p^{-2}}) \otimes_k k(Z^{p^{-1}}) \otimes_k k(Y^{p^{-1}}). \end{aligned}$$

$k(X^{p^{-2}}, X^{p^{-2}}Y^{p^{-1}} + Z^{p^{-1}})/k$ *est irréductible (cf. Exemple 2.1).*

Contrairement à l'unicité des facteurs d'une factorisation, le résultat ci-dessous confirme l'unicité de la forme de la factorisation de longueur maximale d'une certaine classe d'extensions. Plus précisément, on a :

Théorème 3.1. *Soit* K/k *une extension purement inséparable finie de degré d'irrationalité* $di(K/k) \leq 4$. *Si* K/k *admet une e-factorisation de longueur maximale* m, *alors toute factorisation de* K/k *de longueur* m *est nécessairement une e-factorisation.*

Pour la preuve de ce théorème, nous aurons besoin des résultats suivants :

On rencontre fréquemment la proposition ci-dessous dans l'étude de la linéarité disjointe.

Proposition 3.2. *Soient K_1 et K_2 deux corps intermédiaires d'une extension K/k, k-linéairement disjoints. Soient L_1 et L_2 des sous corps respectifs de K_1 et K_2. Alors, $L_2(K_1)$ et $L_1(K_2)$ sont $k(L_1)(L_2)$-linéairement disjoints. En particulier, $L_2(K_1) \cap L_1(K_2) = k(L_1)(L_2)$.*

Preuve. Immédiat, application de la transitivité de la linéarité disjointe.

Ce résultats s'étend à m corps $K_1, K_2, \cdots, K_m$, k-linéairement disjoints. Soient L_i un sous corps de K_i pour $i = 1, \cdots, m$, et $L = \prod_{i=1}^{m} L_i$, alors $L(K_1), L(K_2), \cdots, L(K_m)$ sont $k(L)$-linéairement disjoints.

Proposition 3.3. *Soient $K_1 \otimes_k K_2$ une factorisation d'une extension purement inséparable finie K/k et F/k la plus petite sous-extension de K/k telle que K/F est modulaire. Si $di(K_1/k) \leq 2$, il existe une sous-extension K_1'/k de K/k vérifiant :*

1. *$K \simeq K_1' \otimes_k K_2$.*
2. *$F \cap K_1'$ est la plus petite sous-extension de K_1'/k telle que $K_1'/F \cap K_1'$ est modulaire.*

En particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $o_i(K_1'/k) = o_i(K_1/k)$.

Preuve. On se ramène au cas où $di(K_1/k) = 2$, puisque le cas $di(K_1/k) = 1$ est trivial. Posons $m_1 = o_1(K_1/k)$ et $m_2 = o_2(K_1/k)$, et soit (α_1, α_2) une r-base canoniquement ordonnée de K_1/k. D'après $(\mathbf{P_8})$, on a (α_1, α_2) est aussi une r-base canoniquement ordonnée de K/K_2, avec $o_i(K_1/k) = o_i(K/K_2)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. En vertu de $(\mathbf{P_{11}})$, $K/K_2({\alpha_1}^{p^{m_2}})$ est modulaire, et donc $F \subseteq K_2({\alpha_1}^{p^{m_2}})$. Posons $s_1 = o_1(K_1(F)/F)$ et $s_2 = o_2(K_1(F)/F)$. D'après $(\mathbf{P_5})$ et $(\mathbf{P_6})$, $m_2 = o_1(K_1(K_2)/K_2(K^{p^{m_2}})) \leq o_1(K_1(K_2)/K_2) \leq o_1(K_1(F)/F) = s_1 = o(\alpha_1, k({\alpha_1}^{p^{s_1}}))$. De même, on a $m_2 = o_2(K/K_2(K^{p^{m_2}})) \leq o_2(K_1(F)/F) = s_2 \leq o_2(K_1/k) = m_2$. On en déduit que $s_2 = m_2$ et $[K_1 : k({\alpha_1}^{p^{s_1}})] = [k(\alpha_1, \alpha_2) : k({\alpha_1}^{p^{s_1}})] = [k(\alpha_1, \alpha_2) : k(\alpha_1)] \times [k(\alpha_1) : k({\alpha_1}^{p^{s_1}})] = p^{m_2}p^{s_1} = [K_1(F) : F]$. Ou encore $K_1(F) \simeq K_1 \otimes_{k({\alpha_1}^{p^{s_1}})} F$. Ecrivons l'équation de définition de $K_1/k({\alpha_1}^{p^{s_1}})$: ${\alpha_2}^{p^{m_2}} = \sum_{i=0}^{p^{s_1-m_2}-1} C_i {\alpha_1}^{ip^{m_2}}$, avec les C_i sont uniques dans $k({\alpha_1}^{p^{s_1}})$. Or, $({\alpha_1}^{ip^{m_2}})_{0 \leq i \leq p^{s_1-m_2}-1}$ est libre sur F (cf. $(\mathbf{P_7})$), donc $({\alpha_1}^{ip^{m_2}})_{0 \leq i \leq p^{s_1-m_2}-1}$ est aussi libre sur $F \cap K^{p^{m_2}}$. Prolongeons ce sytème à une base B de $K^{p^{m_2}}/F \cap K^{p^{m_2}}$. Comme $K^{p^{m_2}}$ et F sont $F \cap K^{p^{m_2}}$-linéairement disjoints (car K/F est modulaire), alors B est aussi une base de $F(K^{p^{m_2}})/F$. Puisque les $C_i \in k({\alpha_1}^{p^{s_1}}) \subseteq F$, alors par identification les $(C_i)_{0 \leq i \leq p^{s_1-m_2}-1} \in K^{p^{m_2}} \cap F$. Ou encore pour tout $i \in \{0, \cdots, p^{s_1-m_2}-1\}$, ${C_i}^{p^{-m_2}} \in K \cap F^{p^{-m_2}}$. Par suite, $K = K_2(\alpha_1, \alpha_2) \subseteq K_2(\alpha_1, ({C_i}^{p^{-m_2}})_{0 \leq i \leq p^{s_1-m_2}-1}) \subseteq K$. D'après

l'algorithme de la complétion des r-bases, il existe $i \in \{0, \cdots, p^{s_1-m_2}-1\}$ tel que $K = K_2(\alpha_1, {C_i}^{p^{-m_2}})$. Posons $\alpha_2' = {C_i}^{p^{-m_2}}$ et $K_1' = k(\alpha_1, \alpha_2')$. On a $[K_1'(K_2) : K_2] = [K : K_2] = p^{m_1}p^{m_2} \leq [K_1' : k] = [k(\alpha_1, \alpha_2') : k] = [k(\alpha_1, \alpha_2') : k(\alpha_1)][k(\alpha_1) : k] \leq p^{m_1}p^{m_2}$, (car ${\alpha_2'}^{p^{m_2}} = C_i \in k({\alpha_1}^{p^{s_1}}) \subseteq k(\alpha_1)$). Il en résulte que $K \simeq K_1' \otimes_k K_2$ et $K_1' \simeq k(\alpha_1) \otimes_{k({\alpha_1}^{p^{s_1}})} k({\alpha_1}^{p^{s_1}})(\alpha_2')$. On en déduit que la plus petite sous-extension F_1 de K_1'/k telle que K_1'/F_1 est modulaire est contenue dans $k({\alpha_1}^{p^{s_1}})$. En particulier, $F_1 \subseteq F \cap K_1'$, (car $k({\alpha_1}^{p^{s_1}}) \subseteq F$). D'autre part, $K \simeq K_1' \otimes_k K_2 \simeq K_1' \otimes_{F_1} F_1(K_2)$, donc $K/F_1(K_2)$ est modulaire (car K_1'/F_1 est modulaire). D'où $F \subseteq F_1(K_2)$, et par suite $F \cap K_1' \subseteq F_1(K_2) \cap K_1' = F_1$ (cf. proposition 3.2). Cela conduit à $F_1 = F \cap K_1'$. □

D'après l'associativité et la commutativité du produit tensoriel, le résultat ci-dessus se généralise à une factorisation de m facteurs comme suit :

Proposition 3.4. *Soient $K_1 \otimes_k \cdots \otimes_k K_m$ une factorisation d'une extension purement inséparable finie K/k, et F/k la plus petite sous-extension de K/k telle que K/F est modulaire. Si pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$, $di(K_j/k) \leq 2$, alors il existe une famille $(K_i')_{1 \leq i \leq m}$ de sous-extensions de K/k vérifiant :*

1. *$K \simeq K_1' \otimes_k \cdots \otimes_k K_m'$.*
2. *$F \cap K_i'$ est la plus petite sous-extension de K_i'/k telle que $K_i'/F \cap K_i'$ est modulaire pour $i = 1, 2, \cdots, m$.*
3. *Pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $o_i(K_j'/k) = o_i(K_j/k)$.*

En particulier, $F \simeq F \cap K_1' \otimes_k \cdots \otimes_k F \cap K_m'$, et donc F/k est modulaire.

Preuve. Immédiat, application de la proposition 3.2 et la proposition 3.3.

Lemme 3.5. *Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ une r-base canoniquement ordonnée d'une extension purement inséparable finie K/k. S'il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $K \simeq k(\alpha_1, \cdots, \alpha_i) \otimes_k k(\alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n)$, alors pour toute partie $\{\alpha_1', \cdots, \alpha_i'\}$ de K telle que $\{\alpha_1', \cdots, \alpha_i', \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n\}$ est une r-base de K/k, on a $K \simeq k(\alpha_1', \cdots, \alpha_i') \otimes_k k(\alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n)$. En outre, $o_j(K/k) = o_j(k(\alpha_1', \cdots, \alpha_i')/k)$ pour $j = 1, 2 \cdots, i$*

Preuve. cf. [1]. □

Comme conséquence immédiate, on a :

Proposition 3.6. *Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ (resp. G) une r-base canoniquement ordonnée (resp. r-base) d'une extension purement inséparable finie K/k. On suppose que $K \simeq k(\alpha_1, \cdots, \alpha_i) \otimes_k k(\alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n)$. Alors, il existe $\{\alpha_1', \cdots, \alpha_i'\} \subseteq G$ telle que $(\alpha_1', \cdots, \alpha_i', \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n)$ est une r-base canoniquement ordonnée de K/k, et on a $K \simeq k(\alpha_1', \cdots, \alpha_i') \otimes_k k(\alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n)$.*

Preuve. Application du lemme 3.5 et de l'algorithme de la complétion des r-bases. □

Preuve du théorème 3.1. On présente la démonstration uniquement dans le cas où $di(K/k) = 4$ et K/k admet une e-factorisation de longueur maximale $m = 2$, puisque les autres situations ou bien elles sont triviales, ou bien elles ont des preuves analogues à ce cas.

Etant données une extension purement inséparable finie K/k de degré d'irrationalité 4 et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_4)$ (resp. $\{u_1, \cdots, u_4\}$) une r-base canoniquement ordonnée (resp. une r-base) de K/k. Soit F/k la plus petite sous-extension de K/k telle que K/F est modulaire.

1-ière étape : $\mathbf{K \simeq k(\alpha_1) \otimes_k k(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}$.

1-ier cas : $K \simeq k(u_1, u_2) \otimes_k k(u_3, u_4)$. Posons $L_1 = k(u_1, u_2)$ et $L_2 = k(u_3, u_4)$. D'après la proposition 3.4, on se ramène au cas où $L_1/F \cap L_1$ et $L_2/F \cap L_2$ sont modulaires. Comme $K/k(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ est simple (donc modulaire), il en résulte que $F \subseteq k(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.
Par suite, $o_1(K/k) = o(\alpha_1/k(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)) \leq o(\alpha_1/F) \leq o_1(K/k)$ (cf. $(\mathbf{P_6})$), d'où $o_1(K/F) = o_1(K/k)$. On en déduit que $o_1(L_1/L_1 \cap F) = o_1(K/k)$ ou $o_1(L_2/L_2 \cap F) = o_1(K/k)$, puisque $o_1(K/k) = o_1(K/F) = o_1(L_1(L_2)/F) = \sup(o_1(F(L_1)/\ F), o_1(F(L_2)/F)) \leq \sup(o_1(L_1/L_1 \cap F), o_1(L_2/L_2 \cap F)) \leq o_1(K/k)$. Ou encore $L_1 \cap F = k$ ou $L_2 \cap F = k$. D'où K/k admet une factorisation de longueur 3, (car L_1/k ou L_2/k serait modulaire), ce qui contredit l'hypothèse, donc ce cas ne peut exister.
2-ième cas : $K \simeq k(u_1) \otimes k(u_2, u_3, u_4)$. Posons $L_1 = k(u_1)$ et $L_2 = k(u_2, u_3, u_4)$. Puisque K/L_2 est modulaire (K/L_2 est simple), alors $F \subseteq L_2$. D'après la proposition 3.2, on obtient $K \simeq L_1 \otimes_k L_2 \simeq F(L_1) \otimes_F L_2$; et d'après $(\mathbf{P_{12}})$, il existe une r-base canoniquement ordonnée $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$ de $K/F(L_1)$ telle que $K \simeq F(L_1) \otimes_F F(\alpha_1') \otimes_F F(\alpha_2') \otimes_F F(\alpha_3')$. D'autre part, on a $K/k(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ est simple (donc modulaire), il en résulte que $F \subseteq k(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. D'où $o_1(K/k) = o_1(K/k(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)) \leq o_1(K/F) \leq o_1(K/k)$, donc $o_1(K/F) = o_1(K/k)$. Si $o_1(L_1(F)/F) < o_1(K/k)$, alors $o(\alpha_1'/F) = o_1(K/k) = o(\alpha_1'/k)$. En vertu du $(\mathbf{P_8})$, $F(\alpha_1') = k(\alpha_1') \otimes_k F$. On en déduit que $K \simeq F(L_1) \otimes_F F(\alpha_1') \otimes_F F(\alpha_2') \otimes_F F(\alpha_3') \simeq (L_1 \otimes_k F) \otimes_F [(k(\alpha_1') \otimes_k F) \otimes_F F(\alpha_2', \alpha_3')] \simeq L_1 \otimes_k k(\alpha_1') \otimes_k F(\alpha_2', \alpha_3')$. D'où K/k admet une factorisation de longueur 3, contradiction. Par suite, $o_1(L_1(F)/F) = o_1(L_1/k) = o_1(K/k)$, c'est-à-dire $L_1 \otimes_k L_2$ est aussi une e-factorisation.

2-ième étape : $\mathbf{K \simeq k(\alpha_1, \alpha_2) \otimes_k k(\alpha_3, \alpha_4)}$.

1-ier cas : $K \simeq k(u_1, u_2) \otimes_k k(u_3, u_4)$. Posons $L_1 = k(u_1, u_2)$ et $L_2 = k(u_3, u_4)$. D'après la proposition 3.6, il existe $u_i, u_j \in \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ telle que $K \simeq k(u_i, u_j) \otimes_k k(\alpha_3, \alpha_4)$. Nécessairement $\{i, j\} = \{1, 2\}$ ou $\{i, j\} = \{3, 4\}$, sinon K/k admet une factorisation de longueur 3. Il en résulte que $L_1 \otimes_k L_2$ est aussi une e-factorisation.

2-ième cas : $K \simeq k(u_1) \otimes_k k(u_2, u_3, u_4)$. D'après la proposition 3.6, il existe $\{u_i, u_j\} \subseteq \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ telle que $K \simeq k(u_i, u_j) \otimes_k k(\alpha_2, \alpha_3))$. Nécessairement $\{u_i, u_j\} \subseteq \{u_2, u_3, u_4\}$, sinon K/k admet une factorisation de longueur 3, (puisque $k(u_1, u_j) = k(u_1) \otimes_k k(u_j)$ pour tout $2 \leq j \leq 4$). Or, $K \simeq k(u_1) \otimes_k k(u_2, u_3, u_4) \simeq k(u_1, u_i, u_j) \otimes_{k(u_i,u_j)} k(u_2, u_3, u_4)$, donc $K/k(u_i, u_j)$ est modulaire. D'après la propriété $(\mathbf{P_{12}})$ appliquée à $K \simeq k(u_i, u_j) \otimes_k k(\alpha_3, \alpha_4)/k(u_i, u_j)$, on se ramène au cas où $K \simeq k(u_i, u_j) \otimes_k k(\alpha'_1) \otimes_k k(\alpha'_2)$, avec $\{\alpha'_1, \alpha'_2\}$ est une r-base de $K/k(u_i, u_j)$ (contradiction), donc ce cas ne peut exister.

3-ième étape : $\mathbf{k}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \otimes_\mathbf{k} \mathbf{k}(\alpha_4)$.

1-ier cas : $K \simeq k(u_1) \otimes_k k(u_2, u_3, u_4)$. D'après la proposition 3.6, il existe $u_i, u_j, u_h \in \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ telle que $K \simeq k(u_i, u_j, u_h) \otimes_k k(\alpha_4)$. Nécessairement $\{u_i, u_j, u_h\} = \{u_2, u_3, u_4\}$, sinon K/k admet une factorisation de longueur 3. On en déduit que $k(u_1, u_2, u_3) \otimes_k k(u_4)$ est aussi une e-factorisation.
2-ième cas : $K \simeq k(u_1, u_2) \otimes_k k(u_3, u_4)$. Il existe $u_i, u_j, u_h \in \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ telle que $K \simeq k(u_i, u_j, u_h) \otimes_k k(\alpha_4)$. Il en résulte que K/k admet une factorisation de longueur 3 (car on peut supposer que $k(u_i, u_j, u_h) = k(u_1, u_2, u_3) \simeq k(u_1, u_2) \otimes_k k(u_3)$). □

Remarque 3.1. *D'après la démonstration du théorème ci-dessus, les facteurs d'une e-factorisation de longueur maximale d'une extension purement inséparable finie K/k de degré d'irrationalité $di(K/k) \leq 4$ conservent leurs tailles et leurs formes, donc on a unicité de la forme d'un certain type de factorisation.*

Comme conséquence immédiate on a :

Corollaire 3.7. *Soit K/k une extension purement inséparable finie de degré d'irrationalité vérifiant $2 < di(K/k) \leq 4$. Si K/k admet deux types différents de factorisations de longueur m dont l'une est une e-factorisation, alors K/k admet une factorisation de longueur $m + 1$.*

Preuve. Immédiat. □

En particulier, on a :

Corollaire 3.8. *Soit K/k une extension purement inséparable finie de degré d'irrationalité vérifiant $2 < di(K/k) \leq 4$. Si K/k admet deux types différents de factorisations de longueur $di(K/k) - 1$ dont l'une est une e-factorisation, alors K/k est modulaire.*

Preuve. Immédiat. □

3.1 Contre-exemple.

Contrairement aux extensions purement inséparables finies de degré d'irrationalité majoré par 4, voici un contre-exemple d'extension qui ne conserve ni la taille ni la forme des facteurs de ces factorisations de longueur maximale.

Exemple 3.2. *Soient k_0 un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et $X, Y, Z, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ algébriquement indépendants sur k_0. Soit $k = k_0(X, Y, Z, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ le corps du base. Posons $K = k(X^{p^{-2}}, Y^{p^{-3}}, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} X^{p^{-2}} + {\lambda_2}^{p^{-1}} Y^{p^{-2}}, Z^{p^{-3}}, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} Z^{p^{-3}})$, $F = k(\frac{X^{p^{-1}}}{Y^{p^{-1}}} - \frac{1}{Y^{p^{-1}}} Z^{p^{-2}}, Z^{p^{-2}})$, $L_1 = k(Y^{p^{-3}}, X^{p^{-2}}, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} X^{p^{-2}} + {\lambda_2}^{p^{-1}} Y^{p^{-2}})$, $L_2 = k(Z^{p^{-3}}, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} Z^{p^{-3}})$, $L_1' = k(Y^{p^{-3}})$, et $L_2' = k(Z^{p^{-3}}, \frac{X^{p^{-2}} - Z^{p^{-3}}}{Y^{p^{-2}}}, {\lambda_1}^{p^{-1}} \frac{X^{p^{-2}} - Z^{p^{-3}}}{Y^{p^{-2}}} + {\lambda_2}^{p^{-1}}, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} Z^{p^{-3}})$.*

Théorème 3.9. *Sous les notations ci-dessus, on a $L_1 \otimes_k L_2$ et $L_1' \otimes_k L_2'$ sont deux factorisations de types différents de K/k de longueur maximale 2, avec $L_1' \otimes_k L_2'$ est une e-factorisation.*

Pour la preuve de ce théorème, nous aurons besoin des résultats suivants.

Lemme 3.10. *$F = k(\frac{X^{p^{-1}}}{Y^{p^{-1}}} - \frac{1}{Y^{p^{-1}}} Z^{p^{-2}}, Z^{p^{-2}})$ est la plus petite sous-extension de K/k telle que K/F est modulaire.*

Preuve. Pour alléger l'écriture on pose $\theta_1 = Y^{p^{-3}}$, $\theta_2 = Z^{p^{-3}}$, $\theta_3 = \frac{X^{p^{-2}} - Z^{p^{-3}}}{Y^{p^{-2}}}$, $\theta_4 = {\lambda_1}^{p^{-1}} \frac{X^{p^{-2}} - Z^{p^{-3}}}{Y^{p^{-2}}} + {\lambda_2}^{p^{-1}}$ et $\theta_5 = {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} Z^{p^{-3}}$. Si ${\theta_3}^p \notin F$, donc $(1, {\theta_3}^p)$ est libre sur $F \cap K^p$. Prolongeons ce système à une base B de $K^p/F \cap K^p$. Comme ${\theta_4}^p = \lambda_1 {\theta_3}^p + \lambda_2$, et comme K^p et F sont $F \cap K^p$-linéairement disjoints, (car K/F est modulaire), alors B est aussi une base de $F(K^p)/F$. Par identification, ${\lambda_1}^{p^{-1}}, {\lambda_2}^{p^{-1}} \in K$; et par suite ${\lambda_0}^{p^{-1}} \in K$ (car ${\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} Z^{p^{-3}} \in K$). D'où on aura :

$$d_i(k(X^{p^{-1}}, Z^{p^{-1}}, Y^{p^{-1}}, {\lambda_0}^{p^{-1}}, {\lambda_1}^{p^{-1}}, {\lambda_2}^{p^{-1}})/k) = 6 \leq d_i(K/k) = 5,$$

ce qui est absurde. De la même façon on montre que $Z^{p^{-2}} \in F$. D'autre part, on a $K/k(\frac{X^{p^{-1}}}{Y^{p^{-1}}} - \frac{1}{Y^{p^{-1}}} Z^{p^{-2}}, Z^{p^{-2}})$ est modulaire, donc $F = k(\frac{X^{p^{-1}}}{Y^{p^{-1}}} - \frac{1}{Y^{p^{-1}}} Z^{p^{-2}}, Z^{p^{-2}})$. □

Lemme 3.11. *$k_1 = k(Z^{p^{-1}})$ est la plus petite sous-extension de F/k telle que F/k_1 est modulaire. En particulier, F/k est non modulaire.*

Preuve. Démonstration analogue à celle du lemme précédent. Il suffit d'appliquer le critère du modularité. □

Lemme 3.12. *Soit $(a'_1, \cdots, a'_n)$ une r-base canoniquement ordonnée d'une extension purement inséparable finie K/k vérifiant $K \simeq k(a'_1, \cdots, a'_{t-1}) \otimes_k k(a'_t, \cdots, a'_n)$. Si $(a_1, \cdots, a_n)$ est une r-base canoniquement ordonnée de K/k, et s'il existe $s \in \{1, \cdots, t-1\}$ tel que $o_s(K/k) > o_t(K/k)$, alors $\{a_1, \cdots, a_s, a'_t, \cdots, a'_n\}$ est r-libre sur $k(K^p)$.*

Preuve. cf. [1]. □

Preuve du théorème 3.9. Supposons que K/k admet une factorisation de longueur meilleure que 2. Compte tenu de l'associativité et la commutativité du produit tensoriel (déplacement et regroupement des facteurs), on se ramène au cas où $K \simeq K'_1 \otimes_k K'_2 \otimes_k K'_3$, avec $di(K'_1/k) \geq di(K'_2/k) \geq di(K'_3/k)$. Si $di(K'_1/k) = 2$, alors $di(K'_2/k) = 2$ et $di(K'_3/k) = 1$. D'après la proposition 3.4, on aura F/k est modulaire, ce qui absurde. Cela se traduit par $di(K'_1/k) = 3$ et $di(K'_2/k) = d_i(K'_3/k) = 1$. Comme $K \simeq K'_1(K'_2) \otimes_{K'_1} K'_1(K'_3)$ et $di(K'_2(K'_1)/K'_1) = di(K'_3(K'_1)/K'_1) = 1$, il en résulte que K/K'_1 est modulaire. D'où $F \subseteq K'_1$, et en particulier $K \simeq K'_1 \otimes_F F(K'_2) \otimes_F F(K'_3)$. Or, $o_1(K/F) = 3$ et $o_2(K/F) = o_3(K/F) = o_4(K/F) = o_5(K/F) = 1$, donc $o_1(K'_2(F)/F) = o_1(K'_2/k) = 1$ ou $o_1(K'_3(F)/F) = o_1(K'_3/k) = 1$. Ainsi, on se place dans la cas : $K \simeq k(\alpha_1, \cdots, \alpha_4) \otimes_k k(\alpha_5)$ où $(\alpha_1, \cdots, \alpha_5)$ est une r-base canoniquement ordonnée de K/k. En vertu du lemme 3.12, $\{Z^{p^{-3}}, Y^{p^{-3}}, X^{p^{-2}}, \alpha_5\}$ est r-libre sur $k(K^p)$. D'après l'algorithme de la complétion des r-bases appliqué à $K/k(K^p)$, deux cas peuvent se produire. Notons bien que $G = \{Z^{p^{-3}}, Y^{p^{-3}}, X^{p^{-2}}, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} Z^{p^{-2}}, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} X^{p^{-2}} + {\lambda_2}^{p^{-1}} Y^{p^{-2}}\}$ est une r-base de K/k.

1-ier cas : $\{Z^{p^{-3}}, Y^{p^{-3}}, X^{p^{-2}}, \alpha'_5, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} Z^{p^{-2}}\}$ est une r-base de $K/k(K^p)$. D'après $(\mathbf{P_1})$, $\{Z^{p^{-3}}, Y^{p^{-3}}, X^{p^{-2}}, \alpha'_5, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} Z^{p^{-2}}\}$ est aussi une r-base de K/k, et on a

$$K \simeq k(Y^{p^{-3}}) \otimes_k k(X^{p^{-2}}) \otimes_k k(Z^{p^{-3}}, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} Z^{p^{-2}}) \otimes_k k(\alpha'_5) \simeq$$

$$\simeq k(Z^{p^{-3}})(Y^{p^{-3}}) \otimes_{k(Z^{p^{-3}})} k(Z^{p^{-3}})(X^{p^{-2}}) \otimes_{k(Z^{p^{-3}})} k(Z^{p^{-3}})({\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} Z^{p^{-2}})$$

$$\otimes_{k(Z^{p^{-3}})} k(Z^{p^{-3}})(\alpha'_5).$$

On en déduit que $K/k(Z^{p^{-3}})$ est modulaire, d'où $F \subseteq k(Z^{p^{-3}})$. Par suite, $2 = di(F/k) \leq di(k(Z^{p^{-3}})/k) = 1$, ce qui absurde.

2-ième cas : $\{Z^{p^{-3}}, Y^{p^{-3}}, X^{p^{-2}}, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} X^{p^{-2}} + {\lambda_2}^{p^{-1}} Y^{p^{-2}}, \alpha'_5\}$ est une r-base de K/k. D'où $K \simeq k(Z^{p^{-3}}) \otimes_k k(Y^{p^{-3}}, X^{p^{-2}}, {\lambda_0}^{p^{-1}} + {\lambda_1}^{p^{-1}} X^{p^{-2}} + {\lambda_2}^{p^{-1}} Y^{p^{-2}}) \otimes_k k(\alpha'_5)$. On vérifie aussitôt que $K/k(X^{p^{-1}}, Y^{p^{-1}})$ est modulaire,

et par conséquent $F \subseteq k(X^{p^{-1}}, Y^{p^{-1}})$. D'après $(\mathbf{P_6})$, on obtient $o_1(F/k) = 2 \leq o_1(k(X^{p^{-1}}, Y^{p^{-1}})/k) = 1$, contradiction. □

Références

[1] **M. Chellali et E. Fliouet**, Sur les extensions purement inséparable, *Arch. Math.*, **41**, (2003), 369–382

[2] **M. Chellali et E. Fliouet**, Extensions purement inséparables d'exposant non borné, *Archivum Mathematicum*, **40**, (2004), 129–159

[3] **J.N. Mordeson and B.Vinograde**, *Structure of arbitrary purely inseparable extension fields*, Springer-Verlag, Berlin, LNM 173, 1973

[4] **G. Pickert**, Inseparable Körperweiterungen, *Math. Z.*, **52**, (1949), 81–135

[5] **M.E. Sweedler**, Structure of inseparable extensions, *Ann. Math.*, **87**, (1968), 401–410

[6] **W.C. Waterhouse**, The structure of inseparable field extensions, *Trans. Am. Math. Soc.*, **211**, (1975), 39–56

El Hassane Fliouet

Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Mohammed 1, Oujda
Maroc

E-mail: `fliouet@yahoo.fr`

Received: 19.04.2014

Accepted: 20.09.2014